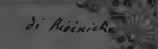






41

Lezioni di Geometria per il ginnasio superiore



Lehrbuch

der



für das

Ober-Gymnasium.

Von

Dr. Franz Močnik.

Mit 324 in Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweite vermehrte Auflage.



Lehrbuch

der

Geometrie

für das

Ober-Gymnasium.

Von

Dr. Franz Močnik,
k. k. Schulrath und Volksschul-Inspektor für Krain.

Mit 324 in den Text eingedruckten Holzschnitten

Zweite vermehrte Auflage.

Wien.
Verlag von Carl Gerold.
1851.



Druck von Carl Gerold und Sohn.

Vorwort

zur zweiten Auflage.

Das so schnell eingetretene Bedürfniß einer zweiten Auflage dieses Lehrbuches machte es mir nicht möglich, die beim Erscheinen der ersten Auflage versprochene Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben bis jetzt in Druck herauszugeben. Auch glaube ich, daß jene Sammlung vielleicht ganz entbehrlich werden könnte, wenn ich in der vorliegenden Auflage am Ende eines jeden Abschnittes sogleich auch die darauf bezüglichen Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung im Beweisen und Auflösen beifüge. Außer diesen Zusätzen sind in dem Lehrbuche keine wesentlichen Veränderungen vorgenommen worden; nur bei der sphärischen Trigonometrie habe ich es für nöthig erachtet, die Fälle, in denen ein sphärisches Dreieck nicht vollkommen bestimmt ist, in nähere Untersuchung zu ziehen.

Olmütz, am 15. Dezember 1850.

Der Verfasser.

Vorwort

zur ersten Auflage.

Ueber die Behandlungsweise des geometrischen Lehrstoffes in den Secundärschulen herrschen, wie aus den zahlreich erscheinenden Lehrbüchern über Geometrie für Gymnasien und Realschulen unverkennbar hervorgeht, sehr abweichende Ansichten. Ein großer Theil der Autoren hält ängstlich an die Methode, welche Euklides in seinen Elementen mit eben so viel Scharfsinn als Consequenz durchgeführt hat; Erklärungen, Axiome, Lehr- und Folgesätze, Aufgaben werden in naturgemäßer Ordnung an einander gereiht, bei den Lehrsätzen Voraussetzung, Behauptung und Beweis, bei den Aufgaben Auflösung und Beweis scharf von einander geschieden. So sehr auch diese Methode geeignet ist, den Schüler an ein gründliches, folgerichtiges Denken zu gewöhnen und darum beim Unterrichte alle Berücksichtigung verdient; so läßt sich auf der andern Seite doch nicht verkennen, und die Erfahrung hat es zur Genüge bestätiget, daß eine solche dogmatische Lehrform durch ihre Schroffheit und Trockenheit viel dazu beiträgt, der Raumlehre jenen Reiz zu benehmen, durch welchen man sich bei einer zweckmäßigen Behandlung so unwiderstehlich zu ihr hingezogen fühlt. Dieß veranlaßte die Pädagogen, statt der Euklidischen Methode die sogenannte heuristisch-genetische Lehrform einzuführen; dabei wird nicht zuerst der Lehrsatz oder die Auflösung der Aufgabe angeführt, sondern man geht von andern bereits erwiesenen Sätzen aus, zieht aus ihnen Folgerungen, combinirt dieselben und arbeitet so auf den Satz oder die Auflösung hin, die der Schüler dann als ein selbstgefundenes Resultat in der bündigsten Form aufstellt. Diese Methode, welche den Lernenden auf dem kürzesten Wege zur Forschung anleitet und damit wissenschaftlich selbstständig macht, welche, da sie die Spannung der Aufmerksamkeit fortwährend steigert, dem Gegenstande eigenthümliches Leben und Interesse verleihet, bewährt sich als ganz vorzüglich in der Trigonometrie und analytischen Geometrie, ja sie ist dabei meistens die allein anwendbare Methode. Da jede der angedeuteten zwei Methoden so

entschiedene Vortheile darbietet, und es für den Lernenden nur höchst anregend sein kann, wenn er auf mannigfaltigen Wegen zu den ewig wahren Gesetzen der Raumgrößen hingeführt wird, so hielt ich es für angemessen, in dem vorliegenden Lehrbuche diesen Rücksichten die Einheit der Methode zum Opfer zu bringen und je nach der Natur des Gegenstandes bald die eine bald die andere Behandlungsweise anzuwenden.

Was den Stoff anbelangt, habe ich mich innerhalb der durch den neuen Gymnasialplan gesteckten Grenzen auf die wesentlichen Lehren der Geometrie, die einerseits für das weitere mathematische Studium, andererseits für die Anwendung auf Physik, Mechanik und Astronomie unentbehrlich sind, zu beschränken geglaubt. Um übrigens die eigene und selbstständige Thätigkeit des Schülers zu fördern, werde ich diesem Lehrbuche baldigst eine Sammlung von andern wichtigen Lehrsätzen und Aufgaben zur Selbstauffindung der Beweise und Auflösungen nachfolgen lassen.

Bezüglich der Kegelschnittslinien könnte man vielleicht Anstoß daran nehmen, daß dieselben an zwei verschiedenen Ortrn behandelt werden, in der Planimetrie bei der Lehre von den krummen Linien, und in der analytischen Geometrie. Allein abgesehen davon, daß es für den Schüler sehr bildend ist, denselben Gegenstand von verschiedenen Seiten und mit Anwendung verschiedener Hilfsmittel zu erfassen, dürfte die von mir gewählte Behandlungsweise auch noch durch eine andere Rücksicht gerechtfertiget erscheinen. Die analytische Betrachtung der Kegelschnittslinien fällt erst in die Schlußmonate der 3. Klasse des Obergymnasiums, während die Bewegungsgesetze und die Optik, welche beide Gegenstände die Kenntniß der Haupteigenschaften jener Linien schon voraussetzen, in den ersten Monaten dieser Klasse vorzunehmen sind; für die mathematische Begründung jener Theile der Physik ist es daher unerläßlich, schon in der graphischen Behandlung der krummen Linien, welche für die erste Klasse des Obergymnasiums vorgeschrieben ist, die Haupteigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel in so weit in Betrachtung zu ziehen, als sich dieselben auf dem Wege der Construction ableiten lassen.

Olmütz, am 15. August 1850.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

	Seite
Einleitung	1

Erster Theil.

Die Planimetrie

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und geradlinige Figuren.

I. Richtung und Größe der Geraden	5
1. Richtung der Geraden	—
2. Größe der Geraden	12
II. Erklärungen und besondere Eigenschaften der geradlinigen Figuren	13
1. Das Dreieck	—
2. Das Viereck	15
3. Das Vieleck	19
III. Kongruenz der geradlinigen Figuren	20
1. Kongruenz der Dreiecke	—
2. Anwendung der Kongruenzfälle	24
a) Lehrsätze von den Dreiecken überhaupt	—
b) Sätze von den gleichschenkligen Dreiecken insbesondere	27
c) Sätze von den Parallelogrammen und den parallelen Linien	29
d) Satz von den regelmäßigen Vielecken	31
3. Kongruenz der Vielecke	32
4. Aufgaben, welche nach der Kongruenzlehre aufgelöset werden können	34
5. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstauffindung der Beweise und Auflösungen	40
IV. Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren	42
1. Geometrische Verhältnisse und Proportionen	—
a) Verhältnisse	—
b) Proporzionen	44
2. Aehnlichkeit der Dreiecke	46
3. Aehnlichkeit der Vielecke	51
4. Aufgaben, welche nach der Aehnlichkeitslehre aufgelöset werden können	52
5. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung im Beweisen und Auflösen	57
V. Flächeninhalt der geradlinigen Figuren	56
1. Gleichheit der Flächen	—
2. Berechnung des Flächeninhaltes	61

	Seite
3. Verhältniß der Flächen	66
4. Verwandlung geradliniger Figuren	68
5. Theilung geradliniger Figuren	71
6. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung	73

Zweiter Abschnitt.

Krumme Linien und von ihnen begrenzte Figuren.

I. Die Kreislinie	75
1. Gerade Linien, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen	—
2. Winkel, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen	79
3. Dem Kreise eingeschriebene und umschriebene Vielecke	83
4. Lage zweier Kreise gegen einander	89
5. Ausmessung des Kreises	91
a) Länge der Kreislinie	92
b) Flächeninhalt des Kreises	94
6. Aufgaben	96
7. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstauffindung der Beweise und Auflösungen	98
II. Die Ellipse	100
III. Die Hyperbel	104
IV. Die Parabel	107

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

I. Gerade Linien im Raume	113
II. Gerade Linien mit der Ebene verglichen	—
III. Ebenen mit Ebenen verglichen	119
IV. Körperwinkel	122
V. Uebungsaufgaben	124

Zweiter Abschnitt.

Körper.

Erklärungen und besondere Eigenschaften der Körper	126
1. Eckige Körper	—
a) Das Prisma	—
b) Die Pyramide	128
c) Regelmäßige Körper	130
2. Runde Körper	131
a) Der Zilinder	132

	Seite
b) Der Kegel	132
c) Die Kugel	133
3. Uebungsaufgaben	135
II. Oberfläche der Körper	137
1. Prisma	—
2. Pyramide und Pyramidalstutz	—
3. Reguläre Körper	139
4. Zilinder	140
5. Kegel und Kegelstutz	—
6. Kugelzone und Kugel	143
7. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung	145
III. Kubikinhalt der Körper	146
1. Gleichheit der Körper	—
2. Berechnung des Körperinhaltes	152
a) Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds und eines Würfels	—
b) Kubikinhalt eines Prisma	154
c) Kubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidalstutzes	155
d) Kubikinhalt eines Zilinders	157
e) Kubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstutzes	158
f) Kubikinhalt einer Kugel	159
3. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung	161

Dritter Theil.

Die Trigonometrie . . . 163

Erster Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Trigonometrische Funkzionen und ihr Zusammenhang	164
1. Sinus und Cosinus	—
2. Tangente und Secante	165
3 Cotangente und Cosecante	166
4. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen desselben Winkels	167
5. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen verschiedener Winkel	168
6. Formeln zur Selbstübung im Ableiten	172
II. Anwendung der ebenen Trigonometrie	173
A. Auflösung der ebenen Dreiecke	—
a) Rechtwinklige Dreiecke	174
b) Schiefwinklige Dreiecke	176
B Berechnung regelmäßiger Vielecke	183
C. Uebungsaufgaben	187

Seite

Zweiter Abschnitt.

Elemente der sphärischen Trigonometrie.

I. Relazionen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes 190
II. Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke . . 198
III. Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke . . 201
IV. Uebungsaufgaben 207

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie 210

Erster Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben. 211

I. Gleichartigkeit der Ausdrücke 213
II. Konstrukzion der Gleichungen des ersten und zweiten Grades 214
1. Gleichungen des ersten Grades 215
2. Gleichungen des zweiten Grades 217
III. Algebraische Auflösung von geometrischen Aufgaben . 219
IV. Uebungsaufgaben 224

Zweiter Abschnitt.

Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene.

I. Analytische Bestimmung des Punktes 225
a) Rechtwinklige Koordinaten . . . . —
b) Polarkoordinaten 227
c) Transformazion der Koordinaten 228
II. Analytische Darstellung der geraden Linie 231
a) Eine einzige Gerade . . . . —
b) Zwei Gerade 241
c) Drei gerade Linien 246
d) Uebungsaufgaben 250
III. Analytische Darstellung der Linien der zweiten Ordnung 251
a) Die Kreislinie . . . . —
b) Die Ellipse 259
c) Die Hyperbel 266
d) Die Parabel 271
e) Wechselseitige Beziehungen der Kurven zweiter Ordnung 275
f) Berührungs- und Normallinien der Kurven zweiter Ordnung . . 277
1. Berührung am Kreise 278
2. Berührung an der Ellipse 280
3. Berührung an der Hyperbel 282
4. Berührung an der Parabel 284
g) Uebungsaufgaben 285

Einleitung.

Gegenstand der Geometrie.

§. 1.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Raumgrößen, d. i. von jenen Größen, welche sich im Raume ausdehnen, oder darin ausgedehnt gedacht werden können.

Das Ausgedehntsein kann nach drei Hauptrichtungen Statt finden: in die Länge, in die Breite und in die Höhe (Tiefe, Dicke). Dehnt sich eine Raumgröße nur nach einer Richtung, in die Länge aus, so heißt sie eine Linie; eine Raumgröße, welche zwei Ausdehnungen hat, in die Länge und in die Breite, nennt man eine Fläche; eine Raumgröße endlich, welche sich nach allen drei Richtungen ausdehnt, in die Länge, in die Breite und in die Höhe, wird ein Körper genannt. Zur Vorstellung eines geometrischen Körpers gelangt man, wenn man bei einem in der Wirklichkeit vorkommenden Körper nur den Raum, den er einnimmt, in Betrachtung zieht, alle übrigen Eigenschaften aber, als Gewicht, Härte, Farbe u. dgl. sich hinwegdenkt.

Zwischen den Linien, Flächen und Körpern gibt es einen innigen Zusammenhang. Ein Körper ist nämlich ein nach allen Seiten begrenzter Raum; die Grenzen eines Körpers sind Flächen; die Grenzen einer Fläche sind Linien; die Grenzen einer Linie heißen Punkte. Ein Punkt ist keine Raumgröße, weil er weder lang, noch breit, noch dick ist, weil ihm also keine Ausdehnung zukommt.

Sowohl die Linien, als auch die Flächen und Körper, kann man sich durch eine stetige Bewegung entstanden denken. Wenn sich ein Punkt im Raume fortbewegt, so ist die dadurch beschriebene Bahn eine Linie.; bewegt sich eine Linie in einer andern Richtung fort, als diejenige ist, in welcher sie selbst liegt, so beschreibt sie eine Fläche; durch die stetige Bewegung einer Fläche in einer andern Richtung, als die sie selbst hat, entsteht ein Körper.

Ein geometrischer Punkt und eine geometrische Linie lassen sich nur vorstellen, aber nicht wirklich zeichnen; die Punkte und Linien auf dem Papiere sind nicht geometrische Punkte und Linien, sondern nur Zeichen derselben.

Linien.

§. 2.

Man unterscheidet gerade und krumme Linien.

Eine Linie, welche in allen Punkten die nämliche Richtung hat, heißt eine gerade Linie, oder auch bloß Gerade.

Die Gerade hat die Eigenschaft, daß sie die kürzeste Linie ist, welche zwischen zwei Punkten gezogen werden kann. Sie dient daher auch dazu, um den Abstand oder die Entfernung zweier Punkte von einander anzugeben.

Da es zwischen zwei Punkten nur eine einzige gerade Linie geben kann, so folgt, daß durch zwei Punkte sowohl die Richtung als die Länge einer Geraden vollkommen bestimmt ist. — Um von einem bestimmten Punkte reden zu können, setzt man neben das Zeichen des Punktes einen Buchstaben hin; um daher eine gerade Linie auszudrücken, braucht man nur ihre Endpunkte mit Buchstaben zu bezeichnen und diese zusammen zu stellen. So heißt die Gerade zwischen den Punkten A und B die Gerade AB oder BA.

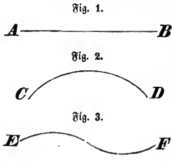


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Jede Linie, von welcher kein Theil gerade ist, heißt krumm; wie z. B. die Linien CD und EF (Fig. 2, 3).

§. 3.

Unter den krummen Linien ist die Kreislinie die wichtigste. Sie hat die Eigenschaft, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb derselben liegenden Punkte gleich weit entfernt sind. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum des Kreises.

Fig. 4.

ABCD A (Fig. 4) stellt eine Kreislinie vor, deren Mittelpunkt O ist.

Jeder Theil der Kreislinie, wie AB, wird ein Kreisbogen (Arcus) genannt; die ganze Kreislinie heißt auch der Umfang oder die Peripherie des Kreises.

Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius) des Kreises, z. B. AO, BO. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich, weil alle Punkte des Umfanges vom Mittelpunkte dieselbe Entfernung haben.

Eine gerade Linie, welche von einem Punkte des Umfanges durch das Zentrum bis zum entgegengesetzten Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser (Diameter) des Kreises, wie AC. Jeder Durchmesser ist doppelt so groß als ein Halbmesser; woraus folgt, daß auch alle Durchmesser des Kreises einander gleich sind.

Je größer der Halbmesser, desto größer muß auch die Kreislinie sein. Wenn zwei Kreise aus demselben Mittelpunkte mit demselben Halbmesser beschrieben werden, so fallen sie vollkommen über einander.

Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bögen eingetheilt, welche man Grade nennt. Auf die halbe Peripherie kommen 180,

und auf den vierten Theil derselben 90 Grade. Ein Grad wird wieder in 60 kleinere Bögen, welche Minuten heißen, und 1 Minute in 60 Sekunden eingetheilt. Die Grade, Minuten und Sekunden werden durch die Zeichen °, ', " ausgedrückt; 85° 56' 30" bedeutet also 85 Grad 56 Minuten 30 Sekunden.

Flächen.

§. 4.

Die Flächen werden in ebene und gekrümmte eingetheilt.

Eine ebene Fläche, auch bloß Ebene, ist eine Fläche, bei welcher jede Gerade, welche zwei Punkte der Fläche verbindet, ganz in dieselbe hineinfällt.

Da durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte eine einzige Ebene gelegt werden kann, so folgt, daß durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte die Richtung einer Ebene vollkommen bestimmt ist.

Eine Fläche, wovon kein Theil eine Ebene ist, heißt eine gekrümmte Fläche.

Jede begrenzte Fläche wird eine Figur genannt. Eine ebene Figur ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien eingeschlossen wird. Die Kreisfläche ist eine krummlinige Figur.

Die Linien, von denen eine Figur begrenzt wird, nennt man die Seiten derselben, und die Summe aller Grenzlinien den Umfang. Die Größe der Fläche, welche eine Figur einschließt, wird der Flächenraum oder Flächeninhalt der Figur genannt.

Körper.

§. 5.

Man unterscheidet eckige und runde Körper.

Ein Körper heißt eckig, wenn er von lauter Ebenen begrenzt wird, z. B. ein Würfel. Rund heißt ein Körper, wenn er nicht von lauter Ebenen, sondern entweder bloß von gekrümmten, oder theils von ebenen, theils von gekrümmten Flächen eingeschlossen wird, z. B. eine Kugel, eine Walze.

Die Summe aller Grenzflächen eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und den von ihnen eingeschlossenen Raum den Körperinhalt, Kubikinhalt, auch kubischen Inhalt.

Messen der Raumgrößen.

§. 6.

Eine Größe messen heißt untersuchen, wie oft eine andere bekannte Größe derselben Art in ihr enthalten ist.

Jede Raumgröße kann nur durch eine gleichartige Raumgröße gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper.

1*

Größe, Form und Lage.

§. 7.

Die Geometrie betrachtet an den Raumgrößen nicht nur die Größe, d. i. das Maß der Ausdehnung, sondern auch die Form oder Gestalt, d. i. die Art, wie die einzelnen Theile an einander geordnet sind, und die Lage, d. i. die Größe der Entfernungen von bekannten Punkten, Linien oder Flächen.

Zwei Raumgrößen können gleiche Größe haben und doch in der Form verschieden sein; eben so können zwei Raumgrößen gleiche Form und verschiedene Größe haben.

Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; wenn die Raumgrößen dieselbe Form haben, so heißen sie ähnlich; haben sie endlich gleiche Größe und gleiche Form, so nennt man sie kongruent.

Um anzuzeigen, daß zwei Größen gleich sind, wird dazwischen das Zeichen $=$ (gleich) gesetzt; die Aehnlichkeit wird durch das Zeichen $\sim$ (ähnlich), und die Kongruenz durch die Verbindung beider Zeichen, nämlich durch $\cong$ (kongruent) ausgedrückt.

Kongruente Raumgrößen unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, und müssen, wenn sie über einander gelegt werden, in allen Begrenzungen zusammenfallen, oder was dasselbe ist, sie müssen sich vollkommen decken.

Eintheilung der Geometrie.

§. 8.

Die Geometrie zerfällt in zwei Haupttheile, in die Planimetrie und die Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie handelt von jenen Raumgrößen, welche sich in einer und derselben Ebene darstellen lassen; die Stereometrie beschäftiget sich dagegen mit jenen Raumgrößen, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sondern sich auch noch außerhalb derselben ausdehnen.

In dieser Schrift sollen die vorzüglichsten Lehren der ebenen Geometrie und der Stereometrie zuerst nach der graphischen Methode, d. i. mit Hilfe der geometrischen Konstrukzion entwickelt werden; diese Methode, welche die Sätze durch die Zeichnung versinnlichet, macht alle ihre Schlüsse aus der Konstrukzion, und konstruirt dann wieder die Folgen ihrer Schlüsse. Wir werden später mit der Konstrukzion die Rechnung verbinden, worin die trigonometrische Methode bestehet; und endlich die mannigfaltigen Beziehungen der Raumgrößen, namentlich deren Lage durch bloße Rechnung darzustellen suchen, was den Gegenstand der analytischen Geometrie bildet.

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und geradlinige Figuren.

I. Richtung und Größe der Geraden.

1. Richtung der Geraden.

Parallele und nicht parallele Linien.

§. 9.

Zwei Gerade, welche in einer Ebene gezogen werden, haben entweder dieselbe Richtung, oder sie weichen in ihren Richtungen von einander ab. Zwei gerade Linien, welche in der nämlichen Richtung fortlaufen, so daß sie überall gleich weit von einander entfernt sind, heißen **parallel**; z. B. die Linien AB und CD (Fig. 5). Daß AB mit CD parallel ist, wird durch das dazwischen gesetzte Zeichen ‖ (parallel) angezeigt, nämlich AB ‖ CD.

Fig. 5.

Wenn zwei Gerade in ihren Richtungen von einander abweichen, so daß sie sich auf einer Seite nähern und auf der andern entfernen, so nennt man sie **nicht parallel**, und zwar heißen sie nach der Seite hin, wo sie sich nähern, **konvergirend**, und nach der Seite, wo sie aus einander gehen, **divergirend**. MN und PQ (Fig. 6) sind nicht parallel, nach der rechten Seite hin sind sie divergirend, nach der linken konvergirend.

Fig. 6.

Zwei parallele Linien können, weil sie immer gleich weit von einander entfernt bleiben, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängert; zwei nicht parallele Gerade aber müssen hinlänglich verlängert, in einem Punkte zusammenkommen, und zwar auf derjenigen Seite, nach welcher sie konvergirend sind. Man sagt von zwei Geraden, welche in einem Punkte zusammenkommen, daß sie sich in diesem Punkte **durchschneiden**.

Winkel.

§. 10.

Die Abweichung der Richtungen zweier Geraden, die in einem Punkte zusammentreffen, wird ein **Winkel** ($\angle$) genannt. Den Punkt, in welchem die beiden Geraden zusammenkommen, nennt man den **Scheitel** oder die **Spitze**, und die zwei Geraden selbst die **Schenkel** des Winkels.

Ein Winkel wird entweder mit einem einzigen Buchstaben, den man in seine Oeffnung setzt, benannt, oder mit dem Buchstaben am Scheitel, oder mit drei Buchstaben, indem man zuerst einen Buchstaben an dem einen Schenkel, dann den Buchstaben am Scheitel, und endlich einen Buchstaben am andern Schenkel ausspricht.

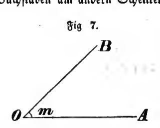


Fig 7.

In dem nebenliegenden Winkel (Fig. 7) ist O der Scheitel, OA und OB sind die Schenkel; der Winkel heißt entweder der Winkel m, oder der Winkel O, oder der Winkel AOB oder BOA.

Ein Winkel ist um so größer, je mehr die Richtungen seiner Schenkel von einander abweichen. Um daher zwei Winkel hinsichtlich ihrer Größe mit einander zu vergleichen, denkt man sich dieselben so über einander gelegt, daß sie denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, ihre andern Schenkel aber auf einerlei Seite des gemeinschaftlichen fallen; derjenige von den beiden Winkeln ist nun der kleinere, dessen eine Schenkel zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt. Fallen beide Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels zusammen, so sind die beiden Winkel gleich; und umgekehrt: wenn man zwei gleiche Winkel so über einander legt, daß sie einerlei Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und daß die beiden andern Schenkel auf einerlei Seite des gemeinschaftlichen liegen, so müssen auch diese andern Schenkel nothwendig zusammenfallen.

Die Länge der Schenkel hat auf die Größe eines Winkels keinen Einfluß; denn wenn man auch die Schenkel verlängert oder verkürzt, so behalten diese noch immer ihre frühern Richtungen, es bleibt also auch die Abweichung ihrer Richtungen, d. i. der von ihnen gebildete Winkel unverändert.

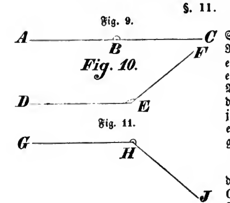
Zwei Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite hin parallel laufen, sind einander gleich. Weil nämlich je zwei Schenkel die nämliche Richtung haben, so muß auch die Abweichung der Richtungen in beiden Winkeln die nämliche sein.

Fig. 8.

Ist daher (Figur 8) AB ∥ DE und BC ∥ EF, so ist der $\angle B = E$.

Gerade, hohle, erhabene Winkel.

§. 11.



Ein Winkel, dessen beide Schenkel eine entgegengesetzte Richtung haben, so daß sie in einer geraden Linie liegen, heißt ein gerader Winkel. Jeder Winkel, der kleiner als ein gerader ist, wird ein hohler, und jeder Winkel, der größer als ein gerader ist, ein erhabener genannt.

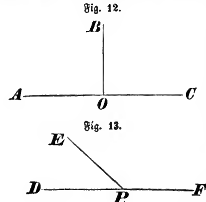
ABC (Fig. 9) ist ein gerader, DEF (Fig. 10) ein hohler, GHI (Fig. 11) ein erhabener Winkel.

Rechte, spitzige, stumpfe Winkel.

§. 12.

Am öftesten kommen in der Geometrie hohle Winkel vor; daher werden dieselben wieder besonders untergetheilt.

Ein Winkel, welcher die Hälfte eines geraden ist, wird ein rechter genannt. Man bezeichnet einen rechten Winkel gewöhnlich mit dem Buchstaben R. Ein Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heißt ein spitziger, und ein Winkel, welcher größer als ein rechter aber doch kleiner als ein gerader ist, ein stumpfer.



Wenn (Fig. 12) der $\angle$ AOB = BOC ist, so sind AOB und BOC rechte Winkel. DPE (Fig. 13) ist ein spitziger, EPF ein stumpfer Winkel.

Den spitzigen und den stumpfen Winkel pflegt man auch mit dem gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel zu bezeichnen.

Da alle geraden Winkel dieselbe Größe haben, so sind auch ihre Hälften, die rechten Winkel einander gleich.

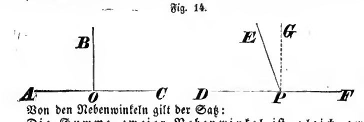
Nebenwinkel.

§. 13.

Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide andern Schenkel in einer geraden

Linie liegen, heißen *Nebenwinkel*; z. B. (Fig. 14) AOB und BOC, eben so DPE und EPF.

Fig. 14.



Von den Nebenwinkeln gilt der Satz:

Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Beweis. Je zwei Nebenwinkel sind entweder gleich oder ungleich; sind sie gleich, so ist jeder von ihnen ein rechter, also betragen beide zusammen gewiß zwei Rechte; sind die beiden Nebenwinkel ungleich, so beträgt der stumpfe um eben so viel mehr, als einen rechten, als der spitzige weniger beträgt, so daß sich beide zusammen wieder genau zu zwei Rechten ergänzen.

Auch sind folgende Sätze von selbst klar:

1. *Alle Winkel, welche auf derselben Seite einer Geraden um denselben Scheitel herum liegen, betragen zusammen zwei rechte Winkel.*
2. *Die Summe aller Winkel, welche um denselben Scheitel rings herum liegen, ist gleich vier Rechten.*
3. *Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel schließen einen rechten Winkel ein.*

Wenn eine Gerade mit einer andern Geraden zwei gleiche Nebenwinkel bildet, so steht sie auf ihr *senkrecht*, sonst *schief*. So ist BO senkrecht auf AC, EP schief auf DF. Daß BO und AC senkrecht steht, wird so angezeigt: BO ⊥ AC.

Eine Gerade, welche auf einer andern senkrecht steht, bildet mit dieser zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzigen und einen stumpfen Winkel.

Scheitelwinkel.

§. 14.

Zwei Winkel, welche von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet werden, heißen *Scheitelwinkel*, wie a und c, oder b und d (Fig. 15).

Fig. 15.

Da zwei gerade Linien, welche sich durchschneiden, nach ihrem Durchschnitte dieselben Richtungen beibehalten, die sie früher hatten, so muß auch ihre Abweichung auf den entgegengesetzten Seiten des Durchschnittspunktes dieselbe sein, d. h.

Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Es ist demnach a = c und b = d.

Korrespondirende und Wechselwinkel.

§. 15.

Wenn zwei Gerade AB und CD (Fig. 16) von einer dritten Geraden EF durchschnitten werden, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte herum acht Winkel. Die Winkel c, d, m, n, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere; die Winkel a, b, o, p dagegen äußere Winkel.

Fig. 16.

Ein äußerer und ein innerer Winkel auf der nämlichen Seite der Durchschnittslinie und an verschiedenen Scheiteln heißen korrespondirende Winkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere Winkel oder auch zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Durchschnittslinie und an verschiedenen Scheiteln werden Wechselwinkel genannt; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

Lehrsätze.

§. 16.

1. Wenn zwei Parallele von einer dritten Geraden durchschnitten werden, so sind
   1. je zwei korrespondirende Winkel gleich,
   2. je zwei Wechselwinkel gleich,
   3. die Summe von je zwei innern oder äußern Winkeln, welche auf derselben Seite der Durchschnittslinie liegen, ist gleich zwei Rechten.

Voraussetzung. Es sei AB ‖ CD (Fig. 17). Zu beweisen ist erstlich, daß je zwei korrespondirende Winkel gleich sind. — Wenn die beiden durchschnittenen Geraden AB und CD parallel sind, so müssen sie dieselbe Richtung haben, folglich müssen sie von der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EF nach derselben Seite hin gleich stark abweichen; diese Abweichungen aber bilden eben die korrespondirenden Winkel; folglich sind je zwei korrespondirende Winkel gleich, also $a = m$, $b = n$, $c = o$, $d = p$.

Fig. 17.

Ferner ist zu zeigen, daß je zwei Wechselwinkel gleich sind. — Es ist eben bewiesen worden, daß $a = m$ ist; allein es ist auch $p = m$, weil diese Winkel Scheitelwinkel sind; folglich ist auch $a = p$. Eben so kann gezeigt werden, daß $b = o$, $c = n$, $d = m$ ist.

Endlich läßt sich beweisen, daß zwei innere oder zwei äußere Winkel auf der nämlichen Seite der Durchschnittslinie zusammen zwei Rechte betragen. — Die Winkel c und a sind Nebenwinkel, daher $c + a = 2R$; statt a kann man den ihm gleichen korrespondirenden Winkel m setzen, wodurch man erhält: $c + m = 2R$. Aus $d + b = 2R$ und $b = n$ folgt eben so $d + n = 2R$. Auf ähnliche Art kann man zeigen, daß auch $a + o = 2R$ und $b + p = 2R$ ist.

§. 17.

2. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die korrespondirenden Winkel gleich sind, so sind sie parallel.

Es sei z. B. $a = m$. Daraus folgt, daß die Geraden AB und CD von der Durchschnittslinie EF nach derselben Seite hin gleich stark abweichen, was nur sein kann, wenn AB und CD die nämliche Richtung haben, d. h. wenn sie parallel sind.

3. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel gleich sind, so sind sie parallel.

Ist z. B. $a = p$, so muß wegen $m = p$ auch $a = m$ sein; in diesem Falle aber muß nach dem letzterwiesenen Satze AB ‖ CD sein.

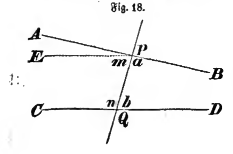
4. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe von zwei innern oder von zwei äußern Winkeln auf derselben Seite der Durchschnittslinie zwei Rechten gleich ist, so sind die beiden durchschnittenen Geraden parallel.

Ist z. B. $c + m = 2R$, so muß wegen $a + c = 2R$, auch $a + c = c + m$, oder wenn man beiderseits c hinwegnimmt, $a = m$ sein; findet aber dieses Statt, so sind, wie früher bewiesen wurde, AB und CD parallel. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß AB ‖ CD sein müsse, wenn $a + o = 2R$ angenommen wird.

§. 18.

5. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel auf einer Seite der Durchschnittslinie kleiner ist als zwei Rechte, so sind die beiden durchschnittenen Geraden nicht parallel, sondern sie konvergiren nach derjenigen Seite hin, auf welcher die beiden innern Winkel liegen, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte.

Fig. 18.



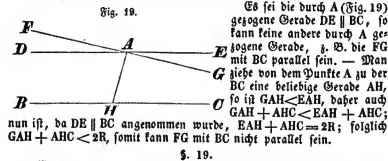
Voraussetzung. $a + b < 2R$ (Fig. 18).

Behauptung. Die Geraden AB und CD müssen nach der rechten Seite hin konvergiren.

Beweis. AB und CD können erstlich nicht parallel sein, weil sonst $a + b = 2R$ sein müßte, was der Voraussetzung widerspricht. Man

hat nur noch nachzuweisen, daß AB wirklich nach der Seite B hin mit CD konvergirt. Weil alle innern Winkel a, b, n, APQ zusammengenommen 4R betragen und $a + b < 2R$ ist, so muß $APQ + n > 2R$ sein. Denkt man sich nun von dem Winkel APQ einen solchen Theil APE hinweggenommen, daß dann $m + n = 2R$ wird, so muß EP ∥ CD sein. Die Gerade BA entfernt sich nun nach der Seite A hin von der Geraden EP, daher divergirt sie nach derselben Seite hin auch mit der Geraden CD, welche mit EP parallel ist; somit muß AB mit dieser Geraden CD nach der entgegengesetzten Seite, nämlich in der Verlängerung über B hinaus konvergiren.

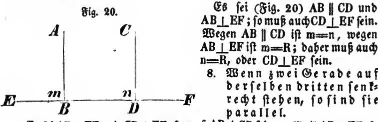
6. Durch einen Punkt kann zu einer Geraden nur eine einzige Parallele gezogen werden.



Es sei die durch A (Fig. 19) gezogene Gerade DE ∥ BC, so kann keine andere durch A gezogene Gerade, z. B. die FG mit BC parallel sein. — Man ziehe von dem Punkte A zu der BC eine beliebige Gerade AH, so ist $GAH < EAH$, daher auch $GAH + AHC < EAH + AHC$; nun ist, da DE ∥ BC angenommen wurde, $EAH + AHC = 2R$; folglich $GAH + AHC < 2R$, somit kann FG mit BC nicht parallel sein.

§. 19.

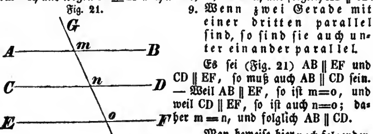
7. Wenn von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht steht, so muß auch die andere darauf senkrecht sein.



Es sei (Fig. 20) AB ∥ CD und AB ⊥ EF; so muß auch CD ⊥ EF sein. Wegen AB ∥ CD ist $m = n$, wegen AB ⊥ EF ist $m = R$; daher muß auch $n = R$, oder CD ⊥ EF sein.

8. Wenn zwei Gerade auf derselben dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Es sei AB ⊥ EF und CD ⊥ EF, so muß AB ∥ CD sein. — Weil AB ⊥ EF, so ist $m = R$, und wegen CD ⊥ EF auch $n = R$; daher $m = n$, und folglich AB ∥ CD.



9. Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel.

Es sei (Fig. 21) AB ∥ EF und CD ∥ EF, so muß auch AB ∥ CD sein. — Weil AB ∥ EF, so ist $m = o$, und weil CD ∥ EF, so ist auch $n = o$; daher $m = n$, und folglich AB ∥ CD.

Man beweise hier noch folgenden Lehrsatz:

10. Wenn man auf jeden Schenkel eines Winkels eine Senkrechte errichtet, so müssen sich diese in einem Punkte schneiden.

Messen der Winkel.

§. 20.

Um die Winkel zu messen, nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Maß an und untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Winkel in dem gegebenen enthalten ist. Als Einheit des Winkelmaßes wird der neunzigste Theil eines rechten Winkels, welchen man Grad nennt, angenommen. Von einem Winkelgrade macht man sich am leichtesten eine richtige Vorstellung, wenn man sich die Periferie eines Kreises in ihre 360 Grade getheilt und zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser gezogen denkt. Dadurch entstehen um den Mittelpunkt 360 kleine Winkel, welche, da sie über einander gelegt, sich vollkommen decken, unter einander gleich sind. Ein solcher Winkel nun, der einem Bogengrade entspricht, wird auch ein Grad und zwar ein Winkelgrad genannt. Jeder Winkelgrad wird in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden eingetheilt. Die Bezeichnung für die Grade, Minuten und Sekunden ist bei den Winkeln dieselbe, wie bei den Bögen.

Zum Messen und Verzeichnen der Winkel bedient man sich, wenn keine große Genauigkeit erfordert wird, des Transporteurs.

Aus dem Begriffe eines Winkelgrades ergeben sich folgende Sätze:

1. Ein gerader Winkel enthält 180°, ein hohler weniger, ein erhabener mehr als 180°.
2. Ein rechter Winkel hat 90°, ein spitziger weniger, ein stumpfer mehr als 90°, aber weniger als 180°.
3. Je zwei Nebenwinkel betragen zusammen genommen 180°.
4. Die Summe aller Winkel, welche um denselben Scheitel auf einer Seite einer Geraden neben einander liegen, ist gleich 180°.
5. Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt rings herum neben einander liegen, beträgt 360°.

2. Größe der Geraden.

§. 21.

Um zwei gerade Linien hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen, denke man sich dieselben so über einander gelegt, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Sodann sehe man auf die andern zwei Endpunkte; fallen sie nicht zusammen, so sind die beiden Geraden ungleich, und zwar ist diejenige kleiner, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Geraden liegt. Wenn aber die Endpunkte der beiden Geraden zusammen fallen, so sind diese Geraden einander gleich; und umgekehrt: wenn zwei Gerade einander gleich sind, muß man sich dieselben auch so vorstellen können, daß ihre Endpunkte in einander fallen.

§. 22.

Um die geraden Linien zu messen, d. i. um ihre Länge zu bestimmen, nimmt man irgend eine bekannte Gerade als Maß an und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Linie in der gegebenen Geraden enthalten ist.

Als Einheit des Linienmaßes nimmt man einen Fuß oder Schuh an und theilt denselben, um auch kleinere Linien messen zu können, in 12 Zoll und einen Zoll in 12 Linien. 6 Fuß nennt man eine Klafter. Die Klafter, Fuß, Zoll, Linien werden folgeweise durch die Zeichen °, ', '', ''' ausgedrückt.

Häufig werden die Längen auch nach Meter bestimmt. Ein Meter ist der 10000000ste Theil eines Meridianquadranten; er enthält 3·16315 Wiener Fuß.

Sehr große Entfernungen werden nach Meilen gemessen. Eine österreichische Meile hat 4000 Klafter.

Eine auf Papier, Holz, Glas oder Metall aufgetragene und gehörig eingetheilte Länge wird ein Maßstab genannt.

Um eine gegebene Gerade wirklich auszumessen, trägt man auf ihr, je nachdem sie größer oder kleiner ist, eine Klafter, einen Fuß, oder einen Zoll so oftmal auf, als es möglich ist. Bleibt nach dem Auftragen kein Rest, so gibt die Zahl, wie oft die Einheit in der Geraden enthalten ist, die Länge jener Geraden, und zwar in der Benennung der aufgetragenen Einheit. Bleibt ein Rest, so trägt man auf demselben die nächst niedrigere Einheit auf.

II. Erklärungen und besondere Eigenschaften der geradlinigen Figuren.

I. Das Dreieck.

§. 23.

Fig. 22.

C

A B

Eine von drei geraden Linien begrenzte Figur wird ein Dreieck genannt.

Bei jedem Dreiecke hat man auf sechs Stücke Rücksicht zu nehmen, auf drei Seiten und auf drei Winkel. Jede Seite, z. B. AB (Fig. 22) hat zwei anliegende Winkel A und B und einen gegenüber liegenden C; jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen, die dritte BC liegt ihm gegenüber.

§. 24.

Von den Seiten eines Dreieckes gilt der Satz:

Zwei Seiten zusammen genommen sind immer größer als die dritte.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht einzusehen. Jede Seite nämlich, z. B. AB, ist als eine Gerade die kürzeste Linie zwischen zwei Eckpunkten A und B; daher muß die Verbindungslinie zwischen diesen Punkten A und B, welche von den beiden andern Seiten AC und CB gebildet

wird, nothwendig länger sein, als die Gerade AB; somit ist $AC+BC>AB$. Eben so folgt $AB+BC>AC$ und $AB+AC>BC$.

Aus $AC+BC>AB$ folgt, wenn man beiderseits BC abzieht, $AC>AB-BC$; d. h.:

In jedem Dreiecke ist eine Seite größer, als der Unterschied der beiden andern Seiten.

In Hinsicht der Seiten werden die Dreiecke in ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige eingetheilt.

Fig. 23.

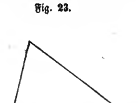


Fig. 24.



Fig. 25.



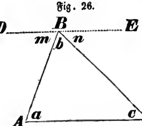
Ein Dreieck, worin jede Seite von jeder andern Seite verschieden ist, heißt ungleichseitig (Fig. 23); sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so heißt es gleichschenklig (Fig. 24); sind alle drei Seiten gleich, so wird das Dreieck gleichseitig genannt (Fig. 25).

§. 25.

In Hinsicht der Winkel eines Dreieckes läßt sich folgender Satz erweisen:

Die Summe aller Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 26.



Um dieses einzusehen, ziehe man durch den Punkt B (Fig. 26) die DE ‖ AC. Es ist dann $m=a$ als Wechselwinkel und $n=c$ ebenfalls als Wechselwinkel; allein $m+b+n=2R$, weil diese Winkel an einer Seite der Geraden DE um denselben Scheitel B herumliegen; daher ist auch, wenn man statt m und n die ihnen gleichen Winkel a und c setzt, $a+b+c=2R$.

Aus diesem Satze ergeben sich sehr wichtige Folgerungen:

1. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, wenn man die beiden Winkel addirt und ihre Summe von zwei Rechten oder von 180^0 abzieht.
2. Wenn zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines andern Dreieckes gleich sind, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.
3. Ist ein Winkel eines Dreieckes so groß als die beiden andern zusammen genommen, so ist er ein rechter.
4. Die Summe zweier Winkel eines Dreieckes ist immer kleiner als zwei Rechte; in einem Dreiecke kann daher nur ein rechter, so wie

auch nur ein stumpfer Winkel vorkommen; zwei Winkel müssen immer spitzig sein.

Mit Rücksicht auf die Winkel werden die Dreiecke in *spitzwinklige*, *rechtwinklige* und *stumpfwinklige* eingetheilt.

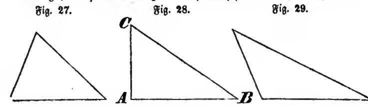


Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

Ein Dreieck heißt *spitzwinklig* (Fig. 27), wenn alle drei Winkel spitzig sind; *rechtwinklig* (Fig. 28), wenn darin ein rechter, *stumpfwinklig* (Fig. 29), wenn darin ein stumpfer Winkel vorkommt. — In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite BC, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die *Hypothenuse*; die beiden Seiten AB und AC, welche den rechten Winkel einschließen, werden die *Katheten* genannt. Das spitz- und stumpfwinklige Dreieck bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen *schiefwinklige* Dreiecke.

Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so heißt der Winkel, welcher von dieser Verlängerung mit einer Seite gebildet wird, ein *äußerer Winkel* des Dreieckes.

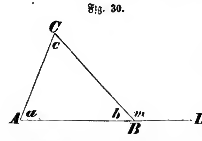


Fig. 30.

So ist CBD (Fig. 30) ein äußerer Winkel des Dreieckes ABC.

Jeder äußere Winkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden innern entgegengesetzten Winkel.

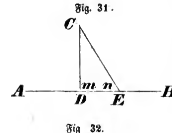
Denn es ist erstlich, weil m und b Nebenwinkel sind, $m + b = 2R$; ferner $a + b + c = 2R$; daher auch $m + b = a + b + c$, oder wenn man beiderseits deu Winkel b hinwegnimmt, $m = a + c$.

Wenn man jede Seite eines Dreieckes über den einen Scheitel hinaus verlängert, so ist die Summe der dadurch gebildeten äußeren Winkel gleich vier Rechten. Der Beweis wird dem Fleiße des Anfängers überlassen.

§. 26.

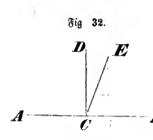
Aus dem Vorhergehenden lassen sich nun auch folgende Sätze beweisen:

1. *Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie kann auf diese nur eine einzige Senkrechte herabgelassen werden.*



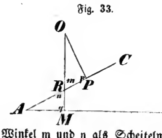
Es sei CD ⊥ AB (Fig. 31), so kann aus C auf die AB keine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht geführt werden. Denn im Dreiecke CDE ist der Winkel m nach der Voraussetzung ein rechter, somit n ein spitziger; die CE steht also auf AB nicht senkrecht, sondern schief.

2. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden.



Es sei CD ⊥ AB (Fig. 32), so kann in C auf die AB nicht noch eine zweite Linie, z. B. CE senkrecht errichtet werden. Denn der Winkel BCD ist nach der Annahme ein rechter, folglich muß ECB ein spitziger Winkel sein. CE steht also nicht senkrecht auf AB.

3. Zwei spitzige oder zwei stumpfe Winkel, deren Schenkel auf einander wechselseitig senkrecht stehen, sind einander gleich.



Es sei OM ⊥ AB und OP ⊥ AC (Fig. 33), so ist zu zeigen, daß der Winkel A = O sein müsse. In den Dreiecken OPR und AMR sind die Winkel m und n als Scheitelwinkel, und die Winkel p und q als rechte einander gleich; es müssen daher auch die dritten Winkel O und A gleich sein.

Wie wird der Beweis geführt, wenn die Winkel, deren Schenkel auf einander senkrecht stehen, beide stumpf sind?

§. 27.

Wenn man irgend eine Seite eines Dreieckes als Grundlinie annimmt, so heißt die Senkrechte, welche von dem gegenüberliegenden Scheitel auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes.

Im gleichschenkligen Dreiecke heißt immer die dritte verschiedene Seite die Grundlinie; die beiden andern Seiten nennt man Schenkel und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel oder die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes.

Die Lage der Höhe eines Dreieckes hängt von den Winkeln an der Grundlinie ab.

1. Sind beide Winkel an der Grundlinie spitzig, so muß die Höhe innerhalb des Dreieckes fallen.

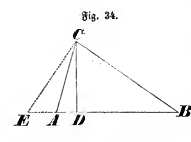


Fig. 34.

Sind im Dreiecke ABC (Fig. 34) die Winkel A und B spitzig, so stehen AC und BC auf AB schief auf, und es kann also die Höhe erstlich nicht in eine der Seiten CA oder CB fallen; die Höhe kann ferner auch nicht außerhalb des Dreieckes, z. B. nach CE hinfallen, weil der Winkel CAB nach der Voraussetzung spitzig, daher sein Nebenwinkel CAE stumpf, und folglich im Dreiecke ACE der Winkel AEC spitzig ist, da er doch ein rechter sein müßte, wenn CE die Höhe des Dreieckes ABC sein sollte. Wenn nun die Höhe weder in eine der Seiten AC oder BC, noch außerhalb des Dreieckes fallen kann, so muß sie innerhalb des Dreieckes zu liegen kommen.

2. Wenn ein Winkel an der Grundlinie ein rechter ist, so fällt die Höhe mit jener Kathete zusammen, welche auf der Grundlinie senkrecht steht.
3. Ist ein Winkel an der Grundlinie ein stumpfer, so muß die Höhe außerhalb des Dreieckes, und zwar auf der Seite des stumpfen Winkels hinausfallen.

Die Beweise für die zwei letztern Fälle wird der Anfänger leicht von selbst auffinden.

2. Das Viereck.

§. 28.

Eine von vier geraden Linien eingeschlossene Figur wird ein Viereck genannt.

Fig. 35.

Die Gerade, welche zwei gegenüberstehende Punkte des Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale. So ist AD (Fig. 35) eine Diagonale des Viereckes ABCD.

In Hinsicht der gegenseitigen Lage der Seiten werden die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme eingetheilt.

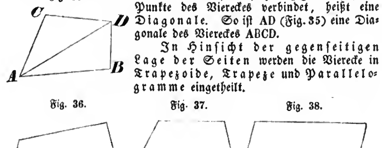


Fig. 36. Fig. 37. Fig. 38.

Ein Trapezoid ist ein Viereck, worin keine Seite mit einer andern parallel ist, wie (Fig. 36). Ein Trapez (Fig. 37) ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel, die andern zwei

Seiten aber nicht parallel sind. Ein Parallelogramm (Fig. 38) ist ein Viereck, worin je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind.

Wenn man bei einem Parallelogramme auf die wechselseitige Größe der Seiten und Winkel Rücksicht nimmt, so ist dasselbe entweder ein Rhomboid, oder ein Rhombus, oder ein Rechteck, oder endlich ein Quadrat.

Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

Ein Parallelogramm, in welchem weder alle Seiten, noch alle Winkel gleich sind, heißt ein Rhomboid (Fig. 39). Ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, heißt ein Rhombus (Fig. 40). Ein Parallelogramm, dessen alle Winkel gleich sind, wird ein Rechteck genannt (Fig. 41). Ein Parallelogramm endlich, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heißt ein Quadrat (Fig. 42); das Quadrat vereiniget demnach die Eigenschaften des Rhombus und des Rechteckes in sich.

§. 29.

In Hinsicht der Winkel eines Viereckes gilt der Satz:

Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten.

Um dieses einzusehen, denke man sich in dem Vierecke eine Diagonale gezogen; dadurch zerfällt das Viereck in zwei Dreiecke, und es betragen die vier Winkel des Viereckes gerade so viel als die Winkel der beiden Dreiecke zusammengenommen; die Winkel eines Dreieckes betragen nun zwei Rechte, also die Winkel beider Dreiecke vier Rechte; mithin ist auch die Summe aller Winkel des Viereckes gleich vier Rechten.

Da in jedem Parallelogramme die beiden Winkel, welche an einer Seite liegen, als innere Winkel zwischen zwei geschnittenen Parallelen zusammengenommen zwei Rechten gleich sind; so folgt:

1. Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so müssen auch die andern Winkel rechte sein; wie im Rechtecke und Quadrate.
2. Ist ein Winkel des Parallelogramms ein schiefer, so sind es auch die andern, und zwar sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich; wie im Rhomboid und im Rhombus. Man pflegt darum das Rhomboid und den Rhombus auch schiefwinklige Parallelogramme zu nennen.

§. 30.

Wenn man in einem Parallelogramme irgend eine Seite als Grundlinie annimmt, so heißt die Senkrechte, welche von irgend einem Punkte der gegenüberstehenden Seite auf diese Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Parallelogramms.

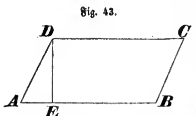


Fig. 43.

Nimmt man in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 43) die Seite AB als Grundlinie an, und ist die Gerade DE senkrecht auf AB, so stellt DE die Höhe vor.

In einem Rechtecke betrachtet man von zwei zusammenstoßenden Seiten die eine als Grundlinie, und die andere als Höhe.

Im Quadrate sind die Grundlinie und die Höhe einander gleich, und zwar wird jede durch eine Seite des Quadrates vorgestellt.

Unter der Höhe eines Trapezes versteht man die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gezogen wird.

Bei Trapezoiden endlich kann von einer Grundlinie und Höhe keine Rede sein.

3. Das Vieleck.

§. 31.

Jede von mehreren geraden Linien eingeschlossene Figur wird ein Vieleck oder ein Polygon genannt.

Eine Gerade, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpunkte des Polygons verbindet, heißt eine Diagonale.

Wie viel Diagonalen sind in einem nseitigen Vielecke möglich?

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten werden die Vielecke in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, u. s. w. eingetheilt.

Hinsichtlich der wechselseitigen Größe der Seiten und Winkel unterscheidet man regelmäßige oder reguläre, und unregelmäßige oder irreguläre Polygone. Ein Vieleck, worin alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heißt regulär; jedes andere Vieleck ist irregulär. Beispiele von regelmäßigen Polygonen hat man an dem gleichseitigen Dreiecke und am Quadrate.

§. 32.

Die Summe aller Winkel eines Vieleckes ist gleich so vielmal zwei Rechten als das Polygon Seiten hat, weniger vier Rechten.

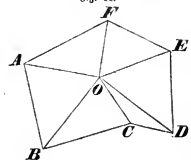


Fig. 44.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, nehme man innerhalb des Vieleckes irgend einen Punkt O (Fig. 44) an, und verbinde denselben mit allen Eckpunkten des Polygons durch gerade Linien. Dadurch zerfällt das Polygon in so viele Dreiecke, als es Seiten hat; und es ist die Summe aller Winkel des Polygons gleich den Winkeln aller

dieser Dreiecke, weniger den Winkeln, welche um den Punkt O herumliegen. Die Summe der Winkel in allen Dreiecken beträgt so vielmal zwei Rechte, als das Polygon Seiten hat; die Summe der Winkel um den Punkt O herum beträgt vier Rechte. Die Summe aller Winkel des Polygons ist also gleich so vielmal zwei Rechten als das Polygon Seiten hat, weniger vier Rechten.

Die Summe aller Winkel

eines Fünfeckes ist gleich $5 \times 2R - 4R = 6R = 540°$,
" Sechseckes " " $6 \times 2R - 4R = 8R = 720°$,
" Siebeneckes " " $7 \times 2R - 4R = 10R = 900°$.

Wie groß ist die Summe aller äußeren Winkel eines Vieleckes, dessen innere Winkel alle hohl sind?

Da in einem regulären Vielecke alle innern Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines solchen Winkels, wenn man die Summe aller Winkel durch die Anzahl derselben dividirt. So ist

der Winkel eines regulären Dreieckes $\frac{180°}{3} = 60°$,
" " " " Viereckes $\frac{360°}{4} = 90°$,
" " " " Fünfeckes $\frac{540°}{5} = 108°$,
" " " " Sechseckes $\frac{720°}{6} = 120°$, u. s. w.

III. Kongruenz der geradlinigen Figuren.

1. Kongruenz der Dreiecke.

§. 33.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie gleiche Form und gleiche Größe haben. Kongruente Dreiecke können sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, von einander unterscheiden, und müssen daher über einander gelegt sich vollkommen decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Stücke, nämlich alle drei Seiten und alle drei Winkel, wechselseitig gleich sein. In kongruenten Dreiecken sind also die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich, und eben so sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber liegen, gleich.

Wegen des innigen Zusammenhanges zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreieckes ist es oft erlaubt, schon aus der wechselseitigen Gleichheit dreier Stücke in zwei Dreiecken auf deren Kongruenz zu schließen. Die Fälle, in denen dieses geschieht, heißen Kongruenzfälle.

§. 34.

1. Kongruenzfall. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die zwei Dreiecke kongruent.

Voraussetzung. Es sei (Fig. 45) die Seite $AB = DE$, der Winkel $A = D$, und $B = E$.

Fig. 45.



Folgerung. Es muß das $\triangle$ ABC $\cong$ DEF sein.

Beweis. Man lege das $\triangle$ DEF so auf ABC, daß die Punkte D und E auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, weil AB = DE ist. Weil der Winkel A = D ist, muß DF längs AC fallen; eben so muß wegen B = E die Seite EF längs BC zu liegen kommen. Wenn aber die Geraden DF und EF längs den Geraden AC und BC fallen, so muß auch der Durchschnittspunkt F der erstern auf den Durchschnittspunkt C der letztern fallen. Die beiden Dreiecke ABC und DEF decken sich also, über einander gelegt, vollkommen, folglich sind sie kongruent.

Aus diesem Kongruenzfalle folgt:

a) Zwei Dreiecke, welche eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel wechselseitig gleich haben, sind kongruent.

b) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Kathete und den anliegenden oder den gegenüberliegenden spitzigen Winkel gleich haben.

c) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die Hypothenuse und einen anliegenden Winkel gleich haben.

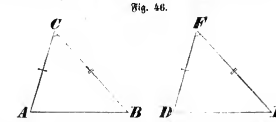
§. 35.

2. Kongruenzfall. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Annahme. Es sei (Fig. 46) AC = DF, BC = EF, und C = F.

Folgerung. Es muß das $\triangle$ ABC $\cong$ DEF sein.

Fig. 46.



Beweis. Man lege das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß FD längs CA, und FE längs CB falle, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel F und C gleich sind. Wegen AC = DF muß auch der Punkt D auf A, und wegen BC = EF der Punkt E auf B, folglich die Seite DE auf AB fallen. Die zwei Dreiecke ABC und DEF sind also so beschaffen, daß sie über einander gelegt sich vollkommen decken, d. h. die beiden Dreiecke sind kongruent.



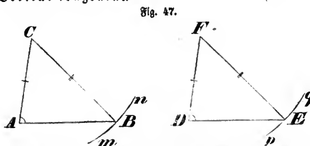
Daraus folgt:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die beiden Katheten gleich haben.

§. 36.

3. Kongruenzfall. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel wechselweise gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Fig. 47.



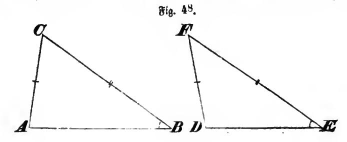
Voraussetzung. Es sei (Fig. 47) AC = DF, BC = EF, ferner BC > AC, wo dann auch EF > DF sein muß, und der Winkel A = D.

Behauptung. Die Dreiecke ABC und DEF müssen kongruent sein.

Beweis. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser CB den Kreisbogen mn, welcher die Seite AB in B durchschneidet; mit dem Halbmesser FE beschreibe man eben so aus F den Kreisbogen pq, welcher durch den Punkt E gehet. Legt man nun das △ DEF sammt den Bogen pq so auf das Dreieck ABC, daß die gleichen Winkel D und A genau in einander fallen, so wird der Schenkel DE längs AB, und DF längs AC zu liegen kommen. Weil AC = DF ist, so fällt der Punkt F auf C; dann muß aber auch der Bogen pq auf den Bogen mn fallen, weil beide aus demselben Mittelpunkte mit den gleichen Halbmessern FE und CB beschrieben erscheinen. Wenn aber die Linien DE und pq in die Linien AB und mn fallen, so muß auch der Durchschnittspunkt E der erstern auf den Durchschnittspunkt B der letztern zu liegen kommen; daher deckt auch EF die Seite CB. Die zwei Dreiecke ABC und DEF fallen also ganz in einander, folglich sind sie kongruent.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht erlaubt, auf die Kongruenz der beiden Dreiecke zu schließen,

Fig. 48.

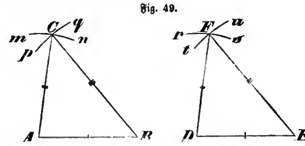


da es möglich ist, daß die zwei Dreiecke nicht kongruent sind. So haben die Dreiecke ABC und DEF (Fig. 48) die Seite $AC = DF$, $BC = EF$, wo $AC < BC$ und $DF < EF$ ist, und den Winkel $B = E$, und doch sind sie nicht kongruent, da das eine spitzwinklig, das andere stumpfwinklig ist.

§. 37.

4. Kongruenzfall. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Fig. 49.



Voraussetzung. Es sei (Fig. 49) $AB = DE$, $AC = DF$, und $BC = EF$.

Behauptung. Die Dreiecke ABC und DEF müssen kongruent sein.

Beweis. Man beschreibe aus A mit dem Halbmesser AC den Kreisbogen mn, und aus B mit dem Halbmesser BC den Bogen pq, so werden sich diese Bögen im Punkte C schneiden. Ferner beschreibe man auch aus D und E beziehungsweise mit den Halbmessern DF und EF die Bögen rs und tu, welche sich in F schneiden. Nun lege man das $\triangle$ DEF mit seinen Kreisbögen so auf das $\triangle$ ABC, daß die Punkte D und E auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, da $AB = DE$ angenommen wurde. Wegen $AC = DF$ muß der Bogen rs auf den Bogen mn, und wegen $BC = EF$ der Bogen tu auf den Bogen pq fallen; es muß demnach auch der Durchschnittspunkt F der Bogen rs und tu auf den Durchschnittspunkt C der Bogen mn und pq zu liegen kommen. Fallen aber die Punkte D, E, F auf die Punkte A, B, C, so decken sich auch die dazwischen liegenden Dreieckseiten; folglich sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent.

§. 38.

Da kongruente Dreiecke in Form und Größe übereinstimmen, so folgt, daß die Stücke, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken man auf die Kongruenz dieser letztern schließen kann, die Form und die Größe eines Dreieckes vollkommen bestimmen. Die ein Dreieck vollkommen bestimmenden Stücke sind also:

1) eine Seite mit den beiden ihr anliegenden Winkeln;
2) zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel;
3) zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel; endlich
4) alle drei Seiten.

Unter den bestimmenden Stücken eines Dreieckes muß sich immer wenigstens eine Seite befinden.

2. Anwendung der vorhergehenden Kongruenzfälle.

§. 39.

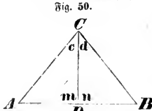
Mit Hilfe der in dem Vorhergehenden entwickelten Kongruenzfälle lassen sich mehrere höchst wichtige Sätze ableiten.

a. Lehrsätze von den Dreiecken überhaupt.

§. 40.

1. **Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so müssen auch die ihnen gegenüberstehenden Seiten einander gleich sein.**

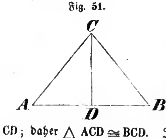
Fig. 50.



Es sei der Winkel $A = B$ (Fig. 50), so ist zu beweisen, daß auch die Seiten AC und BC gleich sein müssen. — Man braucht nur zu zeigen, daß die Seiten AC und BC in kongruenten Dreiecken gleichen Winkeln gegenüber liegen. Zu diesem Ende denke man sich von C auf AB die Senkrechte CD gezogen. In den Dreiecken ACD und BCD sind nun die Winkel A und B nach der Voraussetzung gleich, die Winkel m und n sind als Rechte gleich; also müssen auch die dritten Winkel c und d gleich sein. Die Dreiecke ACD und BCD haben daher eine Seite CD gemeinschaftlich, und die ihr anliegenden Winkel wechselseitig gleich; folglich sind sie kongruent. In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber; den gleichen Winkeln m und n stehen die Seiten AC und BC gegenüber, also ist $AC = BC$.

2) **Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so müssen auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich sein.**

Fig. 51.



Voraussetzung. Es sei die Seite $AC = BC$ (Fig. 51); zu beweisen ist, daß auch die Winkel A und B gleich sind. — Man muß hier zeigen, daß A und B in kongruenten Dreiecken gleichen Seiten gegenüberstehen. Man nimmt an, daß D die Mitte der Geraden AB ist, und zieht die CD. In den Dreiecken ACD und BCD ist nun $AC = BC$, $AD = BD$ und $CD = CD$; daher $\triangle ACD \cong BCD$. In diesen kongruenten Dreiecken liegen der gemeinschaftlichen Seite CD die Winkel A und B gegenüber; also ist $A = B$.

Aus diesem Satze folgt:

a) **In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.**

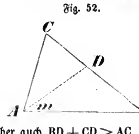
b) **In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich, und daher jeder 60°.**

§. 41.

3. **Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten**

ungleich, und zwar liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Fig. 52.



Es sei (Fig. 52) der Winkel BAC $>$ ABC, so ist zu zeigen, daß auch die Seite BC $>$ AC sein müsse. — Um dieses zu erweisen, sei die Gerade AD so gezogen, daß der Winkel $m = B$ wird; es müssen dann im Dreiecke ABD auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten BD und AD gleich sein. Es ist nun im Dreiecke ACD die Summe AD $+$ CD $>$ AC; daher auch BD $+$ CD $>$ AC, oder BC $>$ AC

Aus diesem Satze folgt:

a) **Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypothenuse größer als jede Kathete.**

b) **Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite die größte.**

c) **Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die Hypothenuse und eine Kathete gleich haben.**

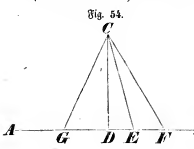
4. **Wenn zwei Seiten eines Dreieckes ungleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar liegt der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.**

Fig. 53.

Es sei (Fig. 53) die Seite AC $>$ BC; so läßt sich beweisen, daß auch der Winkel B $>$ A sein müsse. Würde Jemand läugnen, daß B $>$ A ist, so müßte er behaupten, daß entweder B $=$ A, oder daß B $<$ A ist. Nun kann B nicht gleich A sein, weil dann auch AC $=$ BC sein müßte, was der Voraussetzung AC $>$ BC widerspricht; eben so wenig kann B $<$ A sein, denn da wäre auch AC $<$ BC, was gleichfalls gegen die Annahme ist. Es muß daher B $>$ A sein.

5. **Unter allen Geraden, welche von einem Punkte zu einer gegebenen Geraden gezogen werden können, ist die Senkrechte die kürzeste.**

Fig. 54.



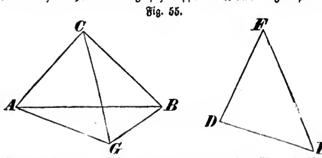
Es sei (Fig. 54) CD $\perp$ AB, und CE irgend eine zu der AB schief stehende Gerade. Das Dreieck CDE ist rechtwinklig, folglich darin die Kathete CD kürzer als die Hypothenuse CE. Eben so folgt, daß CD $<$ CF, CD $<$ CG, . . . ist; die Senkrechte CD ist demnach wirklich die kürzeste Gerade zwischen C und der AB.

Da die Senkrechte die kürzeste Gerade ist, die von einem Punkte zu einer Geraden gezogen werden kann, so dient sie dazu, um die **Entfernung** eines Punktes von einer Geraden anzuzeigen.

§. 42.

6. **Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten wechselseitig gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind; so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist die dritte Seite in jenem Dreiecke größer, in welchem jener eingeschlossene Winkel größer ist.**

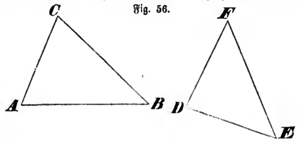
Fig. 55.



Es sei (Fig. 55) $AC = DF$, $BC = EF$, und $ACB > DFE$; so ist zu beweisen, daß auch $AB > DE$ sein müsse. — Um den Beweis zu führen, nehme man den Winkel $ACG = DFE$ an, mache $CG = FE$, und ziehe AG. Die Dreiecke ACG und DEF haben nun zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich, sie sind daher kongruent, und es müssen auch die dritten Seiten AG und DE gleich sein. Man braucht also nur zu zeigen, daß $AB > AG$ ist, oder daß, wenn man die BG zieht, im Dreiecke ABG der Winkel $AGB > ABG$ sein müsse. Weil $BC = EF$, und $GC = EF$, so muß auch $BC = GC$, und daher der Winkel $CBG =$ CBG sein. Nun ist offenbar der Winkel AGB größer als sein Theil CGB, also auch größer als der mit CGB gleiche Winkel CBG, daher um so mehr größer als ein Theil des letztern, nämlich als der Winkel ABG. Wenn aber $AGB > ABG$ ist, so muß auch $AB > AG$, oder $AB > DE$ sein.

7. **Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten wechselseitig gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind; so sind auch die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel ungleich, und zwar ist derjenige Winkel größer, welcher der größern Seite gegenüberliegt.**

Fig. 56.



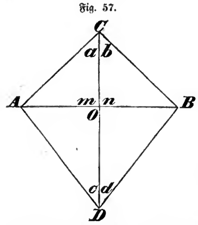
Annahme: Es sei (Fig. 56) $AC = DF$, $BC = EF$, und $AB > DE$; zu beweisen ist, daß auch $ACB > DFE$ sein muß. — Wer nicht zugibt, daß $ACB > DFE$ ist, muß behaupten, daß entweder $ACB = DFE$, oder daß $ACB < DFE$ ist. Das erstere ist nicht möglich; denn wenn $ACB = DFE$ wäre, so hätten die Dreiecke ABC und DEF zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, müßten daher kongruent sein, und es wäre auch $AB = DE$, was der Annahme $AB > DE$ widerspricht. Es kann aber auch nicht $ACB < DFE$ sein; denn dann müßte wegen $AC = DF$, $BC = EF$ und $ACB < DFE$ auch $AB < DE$ sein, was ebenfalls der Voraussetzung widerstreitet. Der Winkel ACB kann also weder dem Winkel DFE gleich, noch kann er kleiner als DFE sein; mithin ist $ACB > DFE$.

b. Sätze von den gleichschenkligen Dreiecken insbesondere.

§. 43.

1. **Wenn über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke aufliegen, und man verbindet ihre Scheitel durch eine gerade Linie; so halbirt diese Gerade erstlich die Winkel an den Scheiteln, zweitens halbirt sie die gemeinschaftliche Grundlinie, und drittens steht sie auf der Grundlinie senkrecht.**

Fig. 57.



Voraussetzung: (Fig. 57) $AC = BC$, $AD = BD$. Zu beweisen ist erstlich, daß die Gerade CD die Winkel an C und D halbirt, daß nämlich $a = b$ und $c = d$ ist. Zu diesem Ende vergleiche man die Dreiecke ACD und BCD; sie haben alle drei Seiten wechselseitig gleich, sind demnach kongruent; folglich liegen darin den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber. Den gleichen Seiten AD und BD liegen die Winkel a und b gegenüber, also ist $a = b$; eben so müssen die Winkel c und d gleich sein, weil sie den gleichen Seiten AC und BC gegenüberstehen.

Ferner ist zu zeigen, daß die Grundlinie AB halbirt wird, daß nämlich $AO = BO$ ist. Die Dreiecke ACO und BCO sind kongruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; daher müssen auch die dritten Seiten gleich sein, also $AO = BO$.

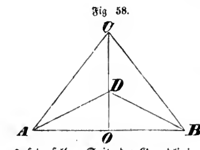


Fig 58.

Nun ist noch zu beweisen, daß CD $\perp$ AB, oder daß der Winkel $m = n$ ist. Dieses folgt aus der Kongruenz der Dreiecke ACO und BCO, weil darin die Winkel m und n den gleichen Seiten AC und BC gegenüberliegen.

Wie wird der Beweis geführt, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke ABC und ABD (Fig. 58) auf derselben Seite der Grundlinie AB liegen?

§. 44.

2. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel durch eine Gerade verbindet, so steht diese Gerade auf der Grundlinie senkrecht, und halbirt den Winkel am Scheitel.

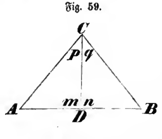


Fig. 59.

Es sei (Fig. 59) AC = BC, und D die Mitte von AB; so ist zu beweisen, daß CD $\perp$ AB, oder daß der Winkel $m = n$ ist, ferner, daß der Winkel C halbirt wird, daß also $p = q$ ist. — Die Dreiecke ACD und BCD sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben; daher müssen die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber liegen, gleich sein, mithin $m = n$ und $p = q$.

3. Die Senkrechte, welche von der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel am Scheitel.

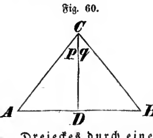
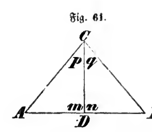


Fig. 60.

Voraussetzung: (Fig. 60) AC = BC und CD $\perp$ AB; zu beweisen hat man, daß AD = BD, und der Winkel $p = q$ ist. — Die Dreiecke ACD und BCD haben zwei Seiten, und den der größern Seite gegenüberliegenden Winkel gleich, sind demnach kongruent; folglich muß auch AD = BD und $p = q$ sein.

4. Wenn der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes durch eine Gerade halbirt wird, so halbirt diese auch die Grundlinie und steht auf der Grundlinie senkrecht.

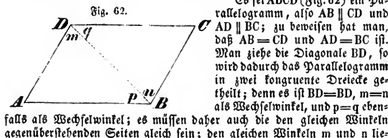


Es sei (Fig. 61) $AC = BC$, und die Gerade CD so gezogen, daß der Winkel $p = q$ ist; so läßt sich beweisen, daß $AD = BD$, und $CD \perp AB$ oder $m = n$ ist. — Die Dreiecke ACD und BCD sind kongruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich haben; daher muß auch $AD = BD$, und $m = n$ sein.

c. Sätze von den Parallelogrammen und den parallelen Linien.

§. 45.

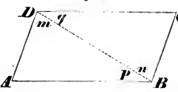
1. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich.



Es sei ABCD (Fig. 62) ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$; zu beweisen hat man, daß $AB = CD$ und $AD = BC$ ist. Man ziehe die Diagonale BD, so wird dadurch das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke getheilt; denn es ist $BD = BD$, $m = n$ als Wechselwinkel, und $p = q$ ebenfalls als Wechselwinkel; es müssen daher auch die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich sein; den gleichen Winkeln m und n liegen die Seiten AB und CD gegenüber, also ist $AB = CD$; eben so muß wegen $p = q$ auch $AD = BC$ sein.

Den hier bewiesenen Lehrsatz pflegt man auch so auszudrücken: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

2. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.



Es sei (Fig. 63) $AB = CD$ u. $AD = BC$, so muß $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$, also ABCD ein Parallelogramm sein. Man ziehe die Diagonale BD, so sind die Dreiecke ABD und BCD kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben; es müssen daher den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, also $m = n$ und $p = q$ sein; wenn aber die Wechselwinkel m und n gleich sind, so müssen die Geraden AD und BC parallel sein; eben so folgt wegen $p = q$ auch $AB \parallel CD$. Das Viereck ABCD ist demnach ein Parallelogramm.

3. Wenn in einem Vierecke zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

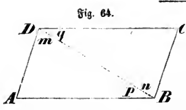


Fig. 64.

Wenn (Fig. 64) $AB = CD$ und zugleich $AB \parallel CD$ ist, so muß ABCD ein Parallelogramm sein. — Zieht man die Diagonale BD; so ist $AB = CD$, $BD = BD$ und $p = q$ als Wechselwinkel, daher muß $\triangle ABD \cong BCD$, und somit $m = n$ sein; aus der Gleichheit der Wechselwinkel m und n aber folgt, daß $AD \parallel BC$, und daher ABCD, weil auch $AB \parallel CD$ angenommen wurde, ein Parallelogramm ist.

4. In jedem Parallelogramme halbiren sich die beiden Diagonalen in ihrem Durchschnittspunkte.

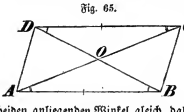


Fig. 65.

Es sei ABCD (Fig. 65) ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$, so läßt sich zeigen, daß die Diagonalen AC und BD im Punkte O halbirt werden, daß nämlich $AO = CO$, und $BO = DO$ ist. — Die Dreiecke ABO und CDO haben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich, daher sind sie kongruent; es müssen also auch die Seiten gleich sein, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen; mithin $AO = CO$ und $BO = DO$.

§. 46.

5. Wenn in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt, und durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite gezogen wird, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt.

Es sei (Fig. 66) AB z. B. in vier gleiche Theile getheilt, nämlich $AD = DE = EF = FB$, und es seien durch die Punkte D, E, F die Geraden DG, EH, FJ parallel mit BC gezogen; so ist zu beweisen, daß auch $AG = GH = HJ = JC$ sein muß. — Man denke sich die Hilfslinien GK, HL, JM parallel mit AB gezogen, so ist, weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind, $GK = DE$, $HL = EF$, $JM = FB$. Da nun nach der Voraussetzung $AD = DE = EF = FB$, so ist auch $AD = GK = HL = JM$. Die Dreiecke ADG, GKH, HLJ, JMC haben also erstlich eine Seite gleich; sie haben überdieß auch die dieser Seite anliegenden Winkel gleich, denn a, b, c, d sind als korrespondirende Winkel, und e, f, g, h als Winkel, deren Schenkel parallel sind, einander gleich; mithin $\triangle ADG \cong GKH \cong HLJ \cong JMC$, und daher $AG = GH = HJ = JC$.

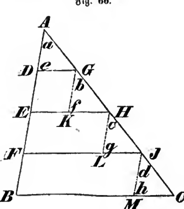


Fig. 66.

d. Satz von den regelmäßigen Vielecken.

§. 47.

Wenn in einem regulären Vielecke zwei auf einander folgende Winkel durch gerade Linien halbirt sind, so ist der Durchschnittspunkt dieser Halbirungslinien von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit entfernt, und eben so von allen Seiten gleichweit entfernt.

Fig. 67.

Es sei ABCDEF (Fig. 67) ein reguläres Polygon, also $AB = BC = CD = DE = EF = FB$, und $\angle A = B = C = D = E = F$. Sind die Winkel A und B halbirt, so daß $a = b$ und $c = d$ ist, so müssen sich, da $A + B < 4R$, also $b + c < 2R$ ist, die Halbirungslinien AO und BO in einem Punkte O schneiden; und es ist erstlich zu beweisen, daß dieser Punkt O von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit absteht, daß nämlich $AO = BO = CO = DO = EO = FO$ sein muß. Zu diesem Ende braucht man nur zu zeigen, daß die Dreiecke AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA kongruent und gleichschenklig sind. In den Dreiecken AOB und BOC ist $AB = BC$, $BO = BO$, $c = d$; daher $\triangle AOB \cong BOC$, und somit $b = e$. Um die Kongruenz der Dreiecke BOC und COD nachzuweisen, ist erstlich $BC = CD$ und $CO = CO$, es braucht nur auch $e = f$ zu sein, was sich leicht erweisen läßt; weil nämlich $b = e$ und $A = C$ ist, so folgt aus $b = \frac{A}{2}$ auch $e = \frac{C}{2}$; wenn aber $e = \frac{C}{2}$, so ist auch $f = \frac{C}{2}$, und daher $e = f$; die Dreiecke BOC und COD sind demnach kongruent, folglich auch $d = g$. Auf dieselbe Art läßt sich zeigen, daß $\triangle COD \cong DOE$, $\triangle DOE \cong EOF$, $\triangle EOF \cong FOA$ ist. Da der Winkel $b = c$, so ist das $\triangle$ AOB gleichschenklig, und es müssen daher auch die übrigen Dreiecke, da sie mit AOB kongruent sind, gleichschenklig sein. Sind aber alle diese Dreiecke kongruent und gleichschenklig, so muß $AO = BO = CO = DO = EO = FO$ sein; also steht O von allen Endpunkten des Polygons gleichweit ab.

Um zu zeigen, daß O auch von allen Seiten des Polygons gleichweit absteht, seien die Geraden OG, OH, OJ, OK, OL, OM senkrecht auf die Seiten des Polygons, so daß sie die Entfernungen des Punktes O von den Seiten des Polygons vorstellen. Da die Senkrechte, welche vom Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gefällt wird, die Grundlinie halbirt, so ist $BG = \frac{AB}{2}$ und $BH = \frac{BC}{2}$; weil nun $AB = BC$, so ist auch $BG = BH$. In den Dreieckn BOG und BOH ist nun

$BG = BH$, $BO = BO$, $c = d$; also ist $\triangle BOG \cong BOH$, und folglich $OG = OH$. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß $OH = OJ$, $OJ = OK$, $OK = OL$, $OL = OM$, $OM = OG$ ist. Der Punkt O ist also von allen Seiten des regulären Polygons gleichweit entfernt.

Dieser Punkt O, welcher von allen Eckpunkten und von allen Seiten des regulären Polygons gleichweit absteht, wird der Mittelpunkt des Polygons genannt.

Aus dem hier geführten Beweise folgt:

Wenn man den Mittelpunkt eines regulären Vielecks mit allen Eckpunkten durch gerade Linien verbindet, so werden dadurch alle Vieleckwinkel halbirt, und das reguläre Vieleck selbst zerfällt in so viele kongruente gleichschenklige Dreiecke, als es Seiten hat.

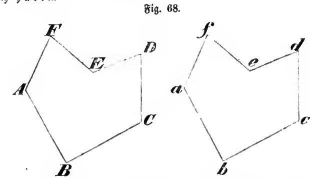
3. Kongruenz der Vielecke.

§. 48.

Damit zwei Vielecke kongruent sein, d. h. über einander gelegt sich vollkommen decken können, so müssen sie alle Seiten in derselben Ordnung gleich haben, und zwischen gleichen Seiten auch gleiche Winkel enthalten.

Zwei Vielecke sind demnach kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung wechselseitig gleich haben.

Fig. 68.



Die Vielecke ABCDEF und abcdef (Fig. 68) sind kongruent, wenn
$AB = ab$, $BC = bc$, $CD = cd$, $DE = de$, $EF = ef$, $FA = fa$, und $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, $F = f$ ist.

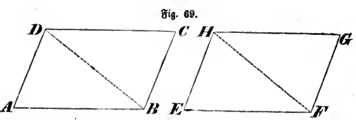
In Bezug auf die Kongruenz der Vielecke sind besonders die nachfolgenden Sätze wichtig.

§. 49.

1. Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich haben.

Es sei (Fig. 69) in den Parallelogrammen ABCD und EFGH die Seite $AB = EF$, $AD = EH$, und der Winkel $A = E$, so muß $ABCD \cong EFGH$

Fig. 69.



sein. Zieht man die Diagonalen BD und FH, so wird jedes der beiden Parallelogramme in zwei kongruente Dreiecke getheilt, also △ ABD≅BCD und △ EFH≅FGH. Allein die Dreiecke ABD und EFH sind kongruent, weil sie nach der Voraussetzung zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben; daher müssen auch die Dreiecke BCD und FGH kongruent sein. Denkt man sich nun das Parallelogramm EFGH so auf ABCD gelegt, daß sich die kongruenten Dreiecke ABD und EFH decken, so müssen auch die Dreiecke BCD und FGH zusammenfallen. Die beiden Parallelogramme decken sich vollkommen, mithin sind sie **kongruent**.

Aus dem hier bewiesenen Satze folgt:

a) **Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn sie zwei an einander stoßende Seiten wechselseitig gleich haben.**

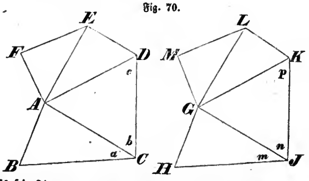
b) **Zwei Quadrate sind kongruent, wenn sie eine gleiche Seite haben.**

c) **Ein Parallelogramm ist durch zwei Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, ein Rechteck durch zwei zusammenstoßende Seiten, ein Quadrat endlich durch eine Seite vollkommen bestimmt.**

§. 50.

2. **Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie aus gleich vielen, der Ordnung nach kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.**

Fig. 70.



Es sei (Fig. 70) △ ABC ≅ GHJ, △ ACD ≅ GJK,
△ ADE ≅ GKL, △ AEF ≅ GLM;

so muß ABCDEF ≅ GHJKLM sein.

Wenn man sich das Polygon GHJKLM so auf das Polygon ABCDEF gelegt denkt, daß die kongruenten Dreiecke GHJ und ABC zusammenfallen, so werden sich auch die Dreiecke GJK und ACD decken, folglich auch die Dreiecke GKL und ADE, also auch GLM und AEF. Es fallen also die beiden Polygone selbst vollkommen zusammen, oder sie sind kongruent.

Umgekehrt:

3. **Wenn man in zwei kongruenten Polygonen von zwei gleichliegenden Punkten zu den übrigen Eckpunkten Diagonalen zieht, so zerfallen dadurch die beiden Polygone in Dreiecke, welche der Ordnung nach kongruent sind.**

Es sei das Vieleck $ABCDEF \cong GHJKLM$, also

$AB = GH$, $BC = HJ$, $CD = JK$, $DE = KL$, $EF = LM$, $FA = MG$;
$A = G$, $B = H$, $C = J$, $D = K$, $E = L$, $F = M$.

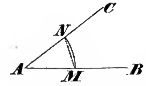
Zieht man nun von den gleichnamigen Punkten A und G Diagonalen zu allen übrigen Eckpunkten der beiden Polygone, so ist zu beweisen, daß die gleichliegenden Dreiecke in den beiden Polygonen kongruent sein müssen. — Wegen $AB=GH$, $BC=HJ$, $B=H$ ist erstlich das Dreieck $ABC \cong GHJ$; daher $AC = GJ$ und $a = m$. Weil $C=J$ und $a=m$, so ist auch $C-a=J-m$ oder $b=n$, ferner $AC=GJ$, $CD=JK$, daher $\triangle ACD \cong GJK$, und $AD = GK$, $c = p$. Auf dieselbe Weise kann auch die Kongruenz von je zwei folgenden Dreiecken nachgewiesen werden.

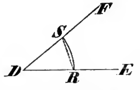
4. Aufgaben, welche nach der Kongruenzlehre aufgelöset werden können.

§. 51.

1. **Es soll ein Winkel verzeichnet werden, der einem gegebenen Winkel BAC (Fig. 71) gleich ist.**

Fig. 71.





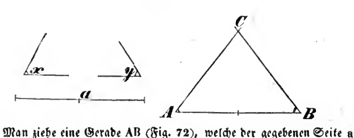
Auflösung. Man ziehe eine Gerade DE, beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe man auch aus D einen Bogen, welcher die Gerade DE in R durchschneidet; endlich fasse man den Abstand MN, und durchschneide damit aus R den von D aus beschriebenen Bogen in S; zieht man nun durch D und S die Gerade DF, so ist der Winkel $EDF = BAC$.

Beweis. Um die Richtigkeit dieser Auflösung einzusehen, ziehe man die Geraden MN und RS, und vergleiche die Dreiecke AMN und DRS. Da $AM=DR$, $AN=DS$ und $MN=RS$, so ist $\triangle AMN \cong DRS$, und somit der Winkel $A=D$.

2. **Es soll ein Dreieck verzeichnet werden, worin eine**

Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gegeben ist.

Fig. 72.

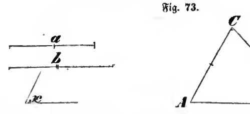


Man ziehe eine Gerade AB (Fig. 72), welche der gegebenen Seite a gleich ist, und konstruire in den Punkten A und B zwei Winkel, welche den gegebenen Winkeln x und y gleich sind; ihre Schenkel AC und BC werden sich in einem Punkte C schneiden, und das verlangte Dreieck ist verzeichnet.

Es versteht sich von selbst, daß die Auflösung dieser Aufgabe nur dann möglich ist, wenn die Summe der Winkel x und y kleiner ist als zwei Rechte.

3. Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn zwei Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

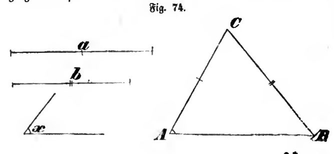
Fig. 73.



Man verzeichne einen Winkel ACB (Fig. 73), welcher dem gegebenen Winkel x gleich ist, schneide von seinen Schenkeln Stücke CA und CB ab, welche den gegebenen Seiten a und b gleich sind, und ziehe die Gerade AB.

4. Ein Dreieck zu verzeichnen, worin zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel gegeben sind.

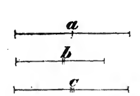
Fig. 74.

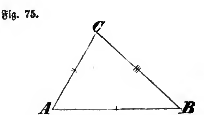


Man konstruire einen Winkel BAC (Fig. 74), welcher dem gegebenen Winkel x gleich ist, mache AC gleich der kleinern Seite b, beschreibe aus C mit der größern Seite a als Halbmesser einen Bogen, welcher den Schenkel AB in B durchschneidet, und ziehe die Gerade BC.

5. Es soll ein Dreieck konstruirt werden, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Fig. 75.





Man ziehe (Fig. 75) $AB = a$, beschreibe aus A mit dem Halbmesser b einen Bogen, und aus B mit dem Halbmesser c ebenfalls einen Bogen, welcher den frühern in einem Punkte C durchschneidet; zieht man nun die Geraden AC und BC, so ist das verlangte Dreieck verzeichnet.

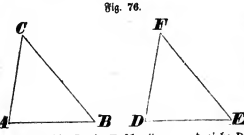
Unter welcher Bedingung ist die Auflösung dieser Aufgabe nur möglich?

Besondere Fälle dieser Aufgabe sind:

Ein gleichschenkliges Dreieck zu verzeichnen, wenn die Grundlinie und ein Schenkel bekannt sind.

Ein gleichseitiges Dreieck zu verzeichnen, wenn eine Seite gegeben ist.

Fig. 76.



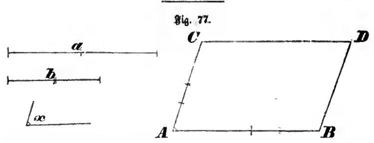
6. Es soll ein $\triangle$ gezeichnet werden, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC (Figur 76) kongruent ist.

Man mache zuerst $DE = AB$, beschreibe aus D und E mit den Halbmessern AC u. BC Kreisbögen, welche sich in F schneiden, und ziehe DF und EF, so ist das $\triangle$ $DEF \cong ABC$.

§. 52.

7. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, wenn zwei Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

Fig. 77.



Man verzeichne (Fig. 77) einen Winkel BAC = x, schneide von den Schenkeln die Stücke AB = a und AC = b ab, beschreibe aus C mit dem Halbmesser a einen Bogen, und durchschneide ihn aus B mit dem Halbmesser b; zieht man nun die Geraden BD und CD, so ist ABCD ein Parallelogramm.

Besondere Fälle dieser Aufgabe:

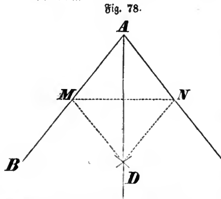
Einen Rhombus zu verzeichnen, wenn eine Seite und ein Winkel gegeben sind.

Ein Rechteck zu konstruiren, wenn zwei Seiten bekannt sind.

Ein Quadrat zu beschreiben, wenn eine Seite gegeben ist.

8. Es soll ein gegebener Winkel BAC (Fig. 78) halbirt werden.

Fig. 78.



Man beschreibe aus A einen Bogen, der die beiden Schenkel in M und N durchschneidet, aus diesen beiden Punkten beschreibe man wieder mit einem gleich großen Halbmesser Bögen, welche sich in D schneiden; zieht man nun AD, so wird dadurch der gegebene Winkel halbirt.

Um die Richtigkeit dieser Auflösung einzusehen, denke man sich die Geraden MN, DM, DN gezogen, wodurch über derselben Grundlinie MN zwei gleichschenklige Dreiecke konstruirt erscheinen; die Gerade AD, welche die beiden Scheitel verbindet, muß daher den Winkel am Scheitel A halbiren.

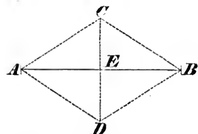
9. Eine gegebene Gerade AB (Fig. 79) zu halbiren.

Man beschreibe aus den Endpunkten A und B nach oben und unten mit demselben Halbmesser Kreisbögen, welche sich in den Punkten C und D durchschneiden; die Gerade CD halbirt nun die gegebene Gerade im Punkte E.

Der Beweis ergibt sich aus der Betrachtung der Figur von selbst.



Fig. 79.



10. **Von einem Punkte A (Fig. 80) außerhalb einer Geraden BC auf diese eine Senkrechte zu fällen.**

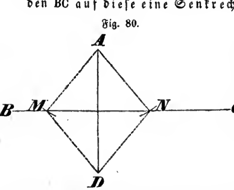


Fig. 80.

Man beschreibe aus A einen Kreisbogen, welcher die Gerade BC in zwei Punkten M und N durchschneidet; aus dieser beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bögen, welche sich in D schneiden; verbindet man nun A und D durch eine gerade Linie, so ist diese die verlangte Senkrechte.

Die Auflösung beruhet auf dem Satze: wenn über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke aufliegen, und man verbindet ihre Scheitel durch eine Gerade, so steht diese auf der Grundlinie senkrecht.

11. **Es soll in einem gegebenen Punkte A (Fig. 81) einer Geraden BC auf diese eine Senkrechte errichtet werden.**

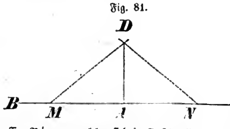


Fig. 81.

a) Liegt der gegebene Punkt gegen die Mitte der gegebenen Geraden.

Man schneide von A aus zu beiden Seiten gleiche Stücke AM und AN ab, beschreibe aus den Punkten M und N mit demselben Halbmesser Bögen, welche sich in D schneiden, und ziehe die AD, welche, wie leicht zu beweisen ist, auf BC senkrecht steht.

b) Liegt der gegebene Punkt mehr gegen das Ende der gegebenen Geraden.

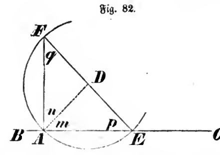


Fig. 82.

Man beschreibe aus irgend einem Punkte D (Fig. 82) mit dem Halbmesser DA einen Kreis, welcher die BC in E schneidet; ziehe die Gerade ED, und verlängere sie bis an die Kreislinie in F; zieht man AF, so ist diese Gerade die gesuchte Senkrechte.

Beweis für die Richtigkeit. Im gleichschenkligen $\triangle$ AED ist $m = p$, im gleichschenkligen $\triangle$ AFD eben so $n = q$, daher $m + n = n + q$; nun ist $m + n + q + p = 2R$, daher $m + n = R$, also FA $\perp$ BC.

§. 53.

12. Durch einen Punkt A (Fig. 83) außerhalb einer Geraden BC mit dieser eine Parallele zu ziehen.

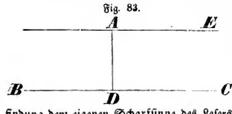


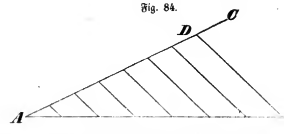
Fig. 83.

Man fälle von A auf BC eine Senkrechte AD, errichte auf diese in A wieder eine Senkrechte AE, so ist AE $\parallel$ BC.

Es gibt noch verschiedene andere Auflösungen dieser Aufgabe, deren Auffindung dem eigenen Scharfsinne des Lesers überlassen wird.

13. Eine gegebene Gerade in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Fig. 84.



Es sei (Fig. 84) die gegebene Gerade AB z. B. in 7 gleiche Theile zu theilen. Man zieht durch A eine beliebige Gerade AC, trägt darauf 7 gleiche Theile auf, und verbindet den letzten Theilungspunkt D mit B; dadurch erhält man ein $\triangle$ ABD, worin eine Seite AD in 7 gleiche Theile getheilt ist; damit auch die Seite AB in 7 gleiche Theile getheilt werde, darf man nur durch jeden Theilungspunkt der AD mit DB eine Parallele ziehen.

§. 54.

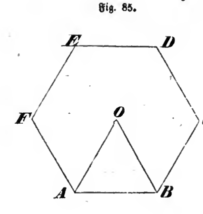


Fig. 85.

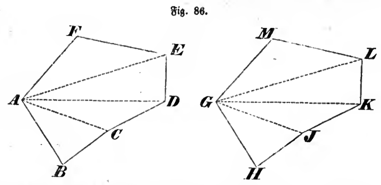
14. Den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes zu finden.

Man halbire (Fig. 85) zwei Vieleckswinkel A und B durch die Geraden AO und BO, welche sich in O schneiden; der Punkt O ist der gesuchte Mittelpunkt des regulären Polygons.

15. Ein Vieleck zu konstruiren, das mit einem gegebenen Vielecke ABCDEF (Fig. 86) kongruent ist.

Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbögen eben so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes kongruent sind. Die dadurch entstehende Figur GHJKLM ist mit der gegebenen kongruent. — Es ist hier nicht nöthig, die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

Fig. 86.



5. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstauffindung der Beweise und Auflösungen.

A. Lehrsätze.

§. 55.

1. Zwei gleichseitige Dreiecke sind kongruent, wenn sie gleiche Höhen haben.
2. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

3. Die aus den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Schenkel gefällten Senkrechten sind einander gleich.
4. Wenn zwei Gerade, welche aus einem Punkte an eine gegebene Gerade zu beiden Seiten der Senkrechten schief gezogen werden, von der Senkrechten gleich weit abstehen, so sind die beiden schiefen Geraden einander gleich.
5. Von zwei schiefen Geraden, welche aus einem Punkte an eine gegebene Gerade so gezogen werden, daß sie von der Senkrechten ungleiche Abstände haben, ist diejenige größer, welche von der Senkrechten weiter absteht.
6. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke den Scheitel des rechten Winkels mit der Mitte der Hypothenuse durch eine Gerade verbindet, so ist diese der halben Hypothenuse gleich.
7. Ein Viereck, dessen Diagonalen sich halbiren, ist ein Parallelogramm.
8. In jedem Rechtecke sind die Diagonalen einander gleich.
9. Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich sind, ist ein Rechteck.
10. In jedem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht auf einander.
11. Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist gleichseitig.
12. Jede Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gezogen wird, theilt dieses in zwei kongruente Vierecke.
23. Wenn man die Halbirungspunkte der Seiten eines Rhombus durch gerade Linien verbindet, so schließen diese ein Rechteck ein.
14. Zwei Quadrate sind kongruent, wenn sie gleiche Diagonalen haben.
15. Zwei Trapeze sind kongruent, wenn sie alle vier Seiten einzeln gleich haben.
16. Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie drei Seiten und die zwischen ihnen liegenden Winkel wechselseitig gleich haben.
17. Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und alle Winkel gleich haben.
18. Zwei reguläre Polygone von gleich viel Seiten sind kongruent, wenn sie eine gleiche Seite haben.
19. Zwei Polygone von gleich vielen Seiten sind kongruent, wenn sie alle gleichliegenden Seiten mit Ausnahme der beiden letzten, und alle gleichliegenden Winkel, außer dem von den zwei letzten Seiten eingeschlossenen, wechselseitig gleich haben.
20. Zwei Polygone sind kongruent, wenn sie alle Seiten, außer der letzten, und alle Winkel, außer den zwei dieser letzten Seite anliegenden, wechselseitig gleich haben.
21. Zwei Polygone sind kongruent, wenn sie alle Seiten und die Winkel außer den drei letzten gleich haben.

B. Aufgaben.

§. 56.

1. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.
2. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei gegebenen Punkten gleichweit absteht.
3. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) die beiden Katheten,
   b) die Hypothenuse und eine Kathete,
   c) die Hypothenuse und ein anliegender Winkel,
   d) eine Kathete und der anliegende spitzige Winkel,
   e) eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel.
4. Ein gleichschenkliges Dreieck zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
   a) die Grundlinie und ein anliegender Winkel,
   b) die Grundlinie und der Winkel am Scheitel,
   c) ein Schenkel und ein Winkel an der Grundlinie,
   d) ein Schenkel und der Winkel am Scheitel,
   e) die Grundlinie und die Höhe,
   f) ein Schenkel und die Höhe,
   g) die Höhe und der Winkel am Scheitel.
5. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren, wenn die Höhe desselben gegeben ist.
6. Ein Rechteck zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) eine Seite und eine Diagonale,
   b) eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der beiden Diagonalen.
7. Einen Rhombus zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) eine Seite und die Höhe,
   b) eine Seite und eine Diagonale.
8. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
   a) zwei Seiten und eine Diagonale,
   b) eine Seite und die beiden Diagonalen,
   c) die Diagonale und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
   d) die Grundlinie, die zweite Seite und die Höhe.
9. Ein Trapez zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) alle vier Seiten,
   b) drei Seiten und ein Winkel.

IV. Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

1. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

a) Verhältnisse.

§. 57.

Die Vergleichung zweier Raumgrößen, um zu sehen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, wird ein **geometrisches Verhältniß** genannt. Vergleicht man z. B. die Geraden AB und CD (Fig. 87),



Fig. 87.

um zu sehen, wie oft CD in AB enthalten ist, so erhält man das Verhältniß AB : CD.

Wie jedes Verhältniß, wird auch das Verhältniß zweier Raumgrößen durch Zahlen ausgedrückt.

Um das Verhältniß zweier Geraden AB und CD in Zahlen darzustellen, trage man die kleinere Gerade CD auf der größeren so oft auf, als es möglich ist. Bleibt nach dem mehrmaligen Auftragen kein Rest übrig, so ist die kleinere Gerade selbst ein Maß von der größern. Da nun das Maß CD in AB 3mal, und in CD 1mal enthalten ist, so verhalten sich die Geraden AB und CD wie 3 : 1.

Fig. 88.

K O Q L

M P N

Wäre aber die kleinere Gerade MN (Fig. 88) in der größern KL nicht genau enthalten, so daß nach dem 3maligen Auftragen noch ein Rest OL übrig bleibt, der natürlich kleiner ist als MN, so müßte man eine dritte Linie suchen, welche ein gemeinschaftliches Maß von KL und MN ist. Dieses geschieht auf folgende Art. Nachdem man die kleinere Gerade MN auf der größern KL aufgetragen hat, untersucht man, wie oft der Rest OL in der kleinern Linie MN enthalten ist, indem man OL auf MN so oft aufträgt als es angeht; es sei OL in MN 2mal enthalten, und es bleibe PN als Rest. Dieser Rest wird wieder auf dem frühern Reste OL aufgetragen; es sei dieses 1mal möglich, mit dem Reste QL. Der Rest QL wird ferner auf PN so oft aufgetragen, als es möglich ist; es sei QL in PN genau 4mal enthalten, so daß kein Rest übrig bleibt. QL ist nun das größte gemeinschaftliche Maß zwischen den beiden Geraden KL und MN. Um das Zahlenverhältniß zwischen diesen zwei geraden Linien aufzustellen, hat man

$$\begin{aligned} PN &= 4QL, \\ OL &= PN + QL = 5QL, \\ MN &= 2OL + PN = 14QL, \\ KL &= 3MN + OL = 47QL. \end{aligned}$$

Da also das Maß QL in KL 47mal, in MN 14mal enthalten ist, so haben die Geraden KL und MN das Verhältniß 47 : 14.

Da der nach dem Auftragen gebliebene Rest zwar kleiner als der vorhergehende Rest sein muß, demselben übrigens keine Grenze vorgeschrieben ist; so ist es möglich, daß das Auftragen des jedesmaligen Restes auf dem vorhergehenden Reste ohne Ende fortgesetzt wird, und doch immer ein Rest übrig bleibt. In diesem Falle haben die zwei Geraden kein gemeinschaftliches Maß, und es läßt sich ihr Verhältniß zu einander nicht vollkommen genau in Zahlen ausdrücken. Da jedoch durch wiederholtes Auftragen der Rest kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine gegebene Linie, so kann man ihn endlich als eine verschwindende Größe ansehen, und somit ganz vernachläßigen. Wird dann der letzte aufgetragene Rest als gemeinschaftliches Maß der beiden Gera-

den angenommen, so erhält man ein angenähertes Verhältniß zwischen denselben.

Zwei Linien, die ein gemeinschaftliches Maß haben, so daß sich ihr Verhältniß zu einander durch Zahlen vollkommen genau bestimmen läßt, heißen kommensurabel; sonst sind sie inkommensurabel.

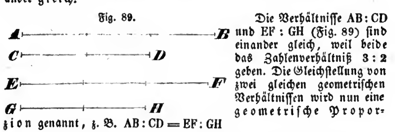
Da das angenäherte Verhältniß zwischen zwei inkommensurablen Größen desto genauer wird, je kleiner man das Maß annimmt, so darf man zwei inkommensurable Größen als zwei kommensurable betrachten, deren gemeinschaftliches Maß unendlich klein ist. Gilt daher irgend ein Gesetz für je zwei kommensurable Größen, so muß es auch für je zwei inkommensurable Statt finden; so daß man bei der Ausmittlung von Verhältnissen zwischen den Raumgrößen stets nur den Fall zu berücksichtigen braucht, wo diese Raumgrößen kommensurabel sind.

b) Proporzionen.

§. 58.

Zwei Verhältnisse, welche dasselbe Zahlenverhältniß geben, sind einander gleich.

Fig. 89.



Die Verhältnisse AB : CD und EF : GH (Fig. 89) sind einander gleich, weil beide das Zahlenverhältniß 3 : 2 geben. Die Gleichstellung von zwei gleichen geometrischen Verhältnissen wird nun eine geometrische Proporzion genannt, z. B. AB : CD = EF : GH

Eine Proporzion, in welcher die beiden mittlern Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proporzion; das mittlere Glied wird die mittlere geometrische Proporzionale zwischen den beiden äußern Gliedern, und das vierte Glied die dritte stetige Proporzionale zu dem ersten und mittlern Gliede genannt.

Wenn zwei Arten von Raumgrößen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der andern Art, in derselben Ordnung genommen; so sagt man: die beiden Arten von Raumgrößen stehen in geradem Verhältnisse, oder sie sind gerade proporzionirt. Wenn hingegen zwei Arten von Raumgrößen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der zwei zugehörigen Größen der andern Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen; so sagt man: die beiden Arten von Raumgrößen stehen in verkehrtem Verhältnisse, oder sie sind verkehrt proporzionirt.

Fig. 90.

§. 59.

Hinsichtlich der Proporzionalität der Dreieckseiten sind besonders folgende Sätze wichtig:

1. **Wenn man durch irgend einen Punkt einer Dreieckseite eine Parallele mit einer andern Seite zieht, so sind die Stücke der beiden geschnittenen Seiten sowohl unter einander, als mit den ganzen Seiten gerade proporzionirt.**

Voraussetzung: Es sei DE ∥ BC (Fig. 90).

Behauptung: Es muß
AD : DB = AE : EC, ferner
AB : AD = AC : AE, und
AB : DB = AC : EC sein.

Zunächst ist zu beweisen, daß die Proporzion AD : DB = DB : EC Statt findet. Es sei AM ein gemeinschaftliches Maß zwischen AD und DB, und zwar AD = mAM, DB = nAM, so ist AD : DB = m : n. Denkt man sich durch jeden Theilungspunkt der AB eine Parallele mit BC gezogen, so wird dadurch auch AC in lauter gleiche Theile getheilt, von denen m auf AE und n auf EC kommen; es ist also AE : EC = m : n. Aus dieser und der frühern Proporzion folgt AD : DB = AE : EC.

Auf ganz gleiche Weise läßt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proporzionen nachweisen.

2. **Wenn zwei Seiten eines Dreieckes von einer Geraden so geschnitten werden, daß die Abschnitte gerade proporzionirt sind; so ist die schneidende Gerade mit der dritten Seite des Dreieckes parallel.**

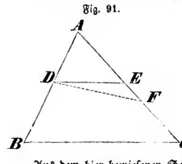


Fig. 91.

Es sei (Fig. 91) AD : DB = AE : EC; so ist zu beweisen, daß DE ∥ BC ist. Wenn man durch D mit BC eine Parallele zieht, so wird AC in zwei Theile getheilt, welche sich so verhalten wie AD zu DB; jede andere durch D gezogene Gerade, z. B. DF, muß die AC in einem andern Verhältnisse theilen. Damit also das Verhältniß AE : EC gleich sein könne dem Verhältnisse AD : DB, muß nothwendig DE ∥ BC sein.

Aus dem hier bewiesenen Satze folgt:

Wenn zwei Seiten eines Dreieckes halbirt sind, und man verbindet die Halbirungspunkte durch eine Gerade, so muß diese mit der dritten Seite parallel sein.

§. 60.

3. Wenn man in einem Dreiecke einen Winkel halbirt, so wird durch die Halbirungslinie die gegenüberstehende Seite in zwei Abschnitte getheilt, welche sich zu einander verhalten, wie die ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes.

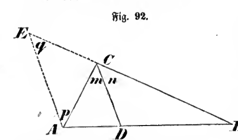


Fig. 92.

Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 92) der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, also $m = n$; zu beweisen ist, daß die Proporzion $AD : DB = AC : BC$ Statt findet. — Man verlängere BC und ziehe durch A mit DC eine Parallele, welche die Verlängerung der BC in E schneidet. Es ist nun $m = p$ als Wechselwinkel, $n = q$ als korrespondirende Winkel, und wegen $m = n$ auch $p = q$, folglich $EC = AC$. In dem Dreiecke ABE ist $CD \parallel EA$, daher findet die Proporzion $AD : DB = EC : CB$ Statt, woraus, wenn AC statt EC gesetzt wird, die Proporzion $AD : DB = AC : CB$ olgt.

2. Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 61.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, d. i. sie haben dieselbe Form, wenn sie alle drei Winkel gleich haben, und wenn je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen.

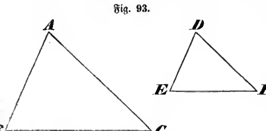


Fig. 93.

Die Dreiecke ABC und DEF (Fig. 93) sind also ähnlich, wenn

$$A = D,\ B = E,\ C = F \text{ und}$$
$$AB : DE = AC : DF = BC : EF \text{ ist.}$$

Die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, werden gleichnamige Seiten genannt.

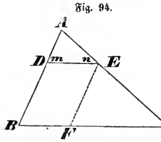
In ähnlichen Dreiecken müssen also alle drei Winkel wechselseitig gleich, und die gleichnamigen Seiten gerade proporzionirt sein.

Es sollen nun die Fälle aufgestellt werden, in denen man auf die Aehnlichkeit zweier Dreiecke schließen darf.

§. 62.

1. **Wenn man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele zieht, so ist das gegebene Dreieck mit dem neu entstandenen kleinen Dreiecke ähnlich.**

Fig. 94.



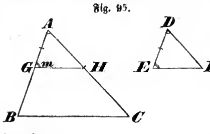
Es sei $DE \parallel BC$ (Fig. 94), so ist zu beweisen, daß das $\triangle ABC \sim ADE$. — Die beiden Dreiecke ABC und ADE haben erstlich gleiche Winkel, denn der Winkel A ist in beiden Dreiecken gemeinschaftlich, und die Winkel B und C sind ihren korrespondirenden Winkeln m und n gleich. Nun ist noch zu zeigen, daß auch je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, dasselbe Verhältniß zu einander haben. Weil $DE \parallel BC$ ist, so findet die Proporzion $AB : AD = AC : AE$ Statt. Zieht man $EF \parallel AB$, so muß auch $AC : AE = BC : BF$, oder weil $BF = DE$ ist, $AC : AE = BC : DE$ sein. Verbindet man diese Proporzion mit der ersten, so hat man $AB : AD = AC : AE = BC : DE$. Die Dreiecke ABC und ADE haben also gleiche Winkel und proporzionirte Seiten, folglich sind sie ähnlich.

§. 63.

2. **Wenn in zwei Dreiecken alle drei Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.**

Es sei (Fig. 95) in den Dreiecken ABC und DEF der Winkel $A = D$, $B = E$ und $C = F$. Wäre $AB = DE$, so müßten die beiden Dreiecke kongruent sein, was hier jedoch nicht angenommen werden soll. Es sei also $AB > DE$. Man schneide von der AB ein Stück $AG = DE$ ab, und ziehe $GH \parallel BC$; so ist das $\triangle ABC \sim AGH$. Das letztere Dreieck AGH ist nun mit DEF kongruent; denn die Seite $AG = DE$, der Winkel $m = E$, weil beide dem Winkel B gleich sind, und der Winkel $A = D$. Wenn aber das Dreieck ABC mit AGH ähnlich, und AGH mit DEF kongruent ist, so muß auch $\triangle ABC \sim DEF$ sein.

Fig. 95.



Aus diesem Aehnlichkeitsfalle folgt:

a) **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel wechselseitig gleich haben**; weil dann auch die dritten Winkel gleich sein müssen.

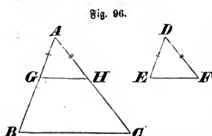
b) **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten wechselseitig parallel sind oder auf einander senkrecht stehen**; denn in beiden Fällen haben die Dreiecke alle drei Win-

kel gleich, da Winkel, deren Schenkel parallel laufen, oder auf einander senkrecht stehen, einander gleich sind. In solchen Dreiecken sind die parallelen oder auf einander senkrechten Seiten die gleichnamigen, daher einander proporzionirt.

§. 64.

3. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gegenseitig gleich ist, und die ihn einschließenden Seiten dasselbe Verhältniß zu einander haben, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Fig. 96.

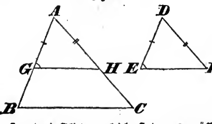


Es sei (Fig. 96) $A = D$ und $AB : DE = AC : DF$. Man mache $AG = DE$, und ziehe $GH \parallel BC$, so ist $\triangle ABC \sim AGH$. Man braucht nur noch zu zeigen, daß das $\triangle AGH \cong DEF$ ist. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und AGH folgt $AB : AG = AC : AH$. Diese und die in der Voraussetzung aufgestellte Proporzion haben die ersten drei Glieder gleich, also müssen sie auch das vierte Glied gleich haben; folglich $AH = DF$. Weil nun die zwei Dreiecke AGH und DEF zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, so sind sie kongruent. Das Dreieck ABC, welches mit AGH ähnlich ist, muß daher auch mit DEF ähnlich sein.

§. 65.

4. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten wechselseitig proporzionirt, und den der größern von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben, so sind sie ähnlich.

Fig. 97.



Es sei (Fig. 97) $AB : DE = AC : DF$, $AC > AB$, $DF > DE$, und $B = E$. Macht man $AG = DE$, und zieht $GH \parallel BC$, so ist das Dreieck $ABC \sim AGH$, und daher $AB : AG = AC : AH$. Vergleicht man diese Proporzion mit der in der Voraussetzung enthaltenen, so sieht man, daß in beiden die ersten drei Glieder gleich sind; es müssen also auch die vierten Glieder gleich sein, nämlich $AH = DF$. Die Dreiecke AGH und DEF haben nun zwei Seiten und den der größern Seite gegenüberliegenden Winkel gleich, mithin sind sie kongruent. Es ist also $\triangle ABC \sim AGH$, $\triangle AGH \cong DEF$; somit auch $\triangle ABC \sim DEF$.

§. 66.

5. **Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig proporzionirt sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.**

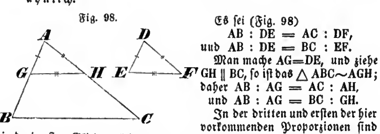


Fig. 98.

Es sei (Fig. 98)

$AB : DE = AC : DF,$

und $AB : DE = BC : EF.$

Man mache $AG = DE$, und ziehe $GH \parallel BC$, so ist das $\triangle ABC \sim AGH$; daher $AB : AG = AC : AH$, und $AB : AG = BC : GH$.

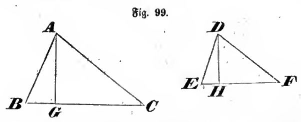
In der dritten und ersten der hier vorkommenden Proporzionen sind die drei ersten Glieder gleich, also muß darin auch das vierte Glied gleich sein, nämlich $AH = DF$; eben so haben die vierte und zweite Proporzion drei Glieder gleich, also muß in denselben auch das vierte Glied gleich sein, nämlich $GH = EF$. Die beiden Dreiecke AGH und DEF haben also alle drei Seiten gleich, folglich sind sie kongruent. Weil nun das Dreieck ABC mit AGH ähnlich ist, so muß es auch mit dem Dreiecke DEF ähnlich sein.

§. 67.

Aus den hier entwickelten Aehnlichkeitsfällen lassen sich folgende Lehrsätze ableiten:

1. **In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen so wie die Grundlinien.**

Fig. 99.

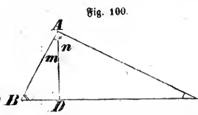


Es sei (Fig. 99) das $\triangle ABC \sim DEF$, und man nehme BC und EF als die Grundlinien, AG und DH als die Höhen der beiden Dreiecke an; zu beweisen hat man, daß $AG : DH = BC : EF$ ist. — Die Dreiecke ABG und DEH haben zwei Winkel wechselseitig gleich, sind daher ähnlich; mithin findet die Proporzion $AG : DH = AB : DE$ Statt. Weil nach der Annahme $\triangle ABC \sim DEF$, so ist auch $BC : EF = AB : DE$. Aus den beiden Proporzionen folgt nun $AG : DH = BC : EF$.

2. **Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypothenuse fällt; so ist a) jedes der dadurch entstehenden kleinen Dreiecke mit dem gegebenen ähnlich, daher die kleinen Dreiecke auch unter einan-**

der ähnlich sind; b) jede Kathete ist die mittlere geometrische Proporzionale zwischen der ganzen Hypothenuse, und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypothenuse; c) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypothenuse.

Fig. 100.



Es sei (Fig. 100) der Winkel BAC ein rechter, und AD ⊥ BC.

a) In den Dreiecken BCA und ABD ist der Winkel B=B, BAC = ADB = R, es ist daher auch der dritte Winkel C = m, und das △ BCA ∼ ABD. — Die Dreiecke BCA und ACD haben den Winkel bei C gemeinschaftlich, die Winkel BAC und ADC sind als rechte gleich, daher auch B = n, und △ BCA ∼ ACD. — Wenn aber △ BCA ∼ ABD, und △ BCA ∼ ACD ist, so muß auch △ ABD ∼ ACD sein.

b) Weil △ BCA ∼ ABD ist, so folgt BC : AB = AB : BD, und weil △ BCA ∼ ACD, so ist auch BC : AC = AC : CD.

c) Wegen △ ABD ∼ ACD ist BD : AD = AD : DE.

Aus dem zweiten Theile des hier bewiesenen Lehrsatzes läßt sich ein sehr merkwürdiger Satz ableiten, der wegen seiner Wichtigkeit weiter unten noch auf eine andere Art bewiesen werden soll.

Nimmt man irgend eine Längeneinheit an, und findet man, nachdem die Katheten des rechtwinkligen Dreieckes, die Hypothenuse und deren Abschnitte damit gemessen wurden, AB = a, AC = b, BC = c, BD = p, DC = q; so ergibt sich aus den unter b) aufgestellten Proporzionen

$$c : a = a : p, \quad c : b = b : q$$

$$\text{daher } cp = a^2, \qquad cq = b^2.$$

Addirt man diese letzten Gleichungen, so erhält man

$$cp + cq = a^2 + b^2.$$

Allein es ist $cp + cq = c(p + q) = c \cdot c = c^2$; daher

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

d. h. in jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Dieser Satz heißt nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch bloße Rechnung die dritte Seite finden.

Wenn die beiden Katheten bekannt sind, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate, addirt die Quadrate, diese Summe gibt das Quadrat der Hypothenuse; um daher die Hypothenuse selbst zu erhalten, darf man nur aus jener Summe die Quadratwurzel ausziehen.

Es sei z. B. die eine Kathete 240″, die andere 44″, wie groß ist die Hypothenuse?

$$240^2 = 57600$$
$$44^2 = 1936$$
$$\text{Hypothenuse} = \sqrt{59536} = 244''.$$

Wenn die Hypothenuse und eine Kathete bekannt sind, so erhebe man beide zum Quadrate, ziehe vom Quadrate der Hypothenuse das Quadrat der Kathete ab, der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ausziehen.

1) Es sei z. B. die Hypothenuse 117″, die eine Kathete 45″; wie groß ist die zweite Kathete?

$$117^2 = 13689$$
$$45^2 = 2025$$
$$\text{die zweite Kathete} = \sqrt{11664} = 108''.$$

2) Man suche die Höhe h eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite s ist.

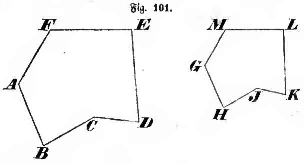
$$h = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{3}.$$

3. Aehnlichkeit der Vielecke.

§. 68.

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel nach der Ordnung gleich, und die gleichliegenden Seiten gerade proporzionirt sind.

Fig. 101.



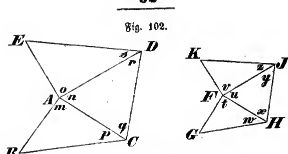
Wenn (Fig. 101) der Winkel A = G, B = H, C = J,
D = K, E = L, F = M, und
AB : GH = BC : HJ = CD : JK = DE : KL = EF : LM = FA : MG
ist, so ist ABCDEF ∼ GHJKLM.

Zwei regelmäßige Vielecke von gleich viel Seiten sind einander ähnlich. Daraus folgt, daß sich in regelmäßigen Vielecken von gleich viel Seiten die Umfänge so zu einander verhalten wie zwei gleichliegende Seiten.

§. 69.

Zwei Vielecke, welche aus gleich vielen der Ordnung nach ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

Fig. 102.



Es sei (Fig. 102) das $\triangle ABC \sim FGH$, $\triangle ACD \sim FHJ$, $\triangle ADE \sim FJK$ Nach dieser Voraussetzung sind je zwei gleichliegende Dreieckwinkel gleich und je zwei gleichliegende Seiten haben dasselbe Verhältniß zu einander. — Es ist zuerst zu beweisen, daß auch je zwei gleichliegende Vieleckswinkel einander gleich sind. Daß $B = G$, $E = K$ ist, liegt schon in der Annahme; wegen $m = t$, $n = u$, $o = v$ ist auch $m + n + o = t + u + v$ oder $A = F$; eben so folgt $p + q = w + x$ oder $C = H$, und $r + s = y + z$ oder $D = J$. Nun ist noch zu zeigen, daß die gleichliegenden Vieleckseiten proporzionirt sind. Nach der Annahme ist $AB : FG = BC : GH$; ferner sind die Verhältnisse $BC : GH$ und $CD : HJ$ einander gleich, weil sie beide einem dritten Verhältnisse $AC : FH$ gleich sind; eben so folgt aus $CD : HJ = AD : FJ$ und $DE : JK = AD : FJ$ auch $CD : HJ = DE : JK$; endlich ist nach der Voraussetzung $DE : JK = EA : KF$. Man hat daher $AB : FG = BC : GH = CD : HJ = DE : JK = EA : KF$. Die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK haben also in der Ordnung gleiche Winkel und proporzionirte Seiten; sie sind demnach ähnlich.

Umgekehrt läßt sich beweisen:

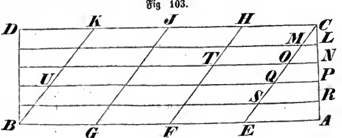
Wenn man in zwei ähnlichen Polygonen von zwei gleichliegenden Punkten zu den übrigen Eckpunkten Diagonalen zieht, so zerfallen dadurch die beiden Polygone in Dreiecke, welche der Ordnung nach ähnlich sind.

4. Aufgaben, welche nach der Aehnlichkeitslehre aufgelöset werden können.

§. 70.

1. Es soll eine Gerade mittelst Transversalen in mehrere gleiche Theile getheilt werden.

Fig 103.



Es sei z. B. die Gerade AB (Fig. 103) in 20 gleiche Theile zu theilen.

Man zerlege 20 in zwei Faktoren 4 und 5, theile die Gerade AB in vier gleiche Theile, in den Endpunkten A und B errichte man Senkrechte, trage darauf 5 gleiche Theile auf, verbinde die letzten Theilungspunkte C und D durch eine Gerade, welche der AB gleich sein muß, und theile auch dieselbe in 4 gleiche Theile. Zieht man sodann durch jeden Theilungspunkt der AC eine Parallele mit AB, und verbindet den Punkt C mit E, H mit F, J mit G, K mit B, so ist die Aufgabe gelöst.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CLM und CAE hat man nämlich $LM : AE = CL : CA$, aber $CL = \frac{1}{5} CA$, also auch $LM = \frac{1}{5} AE$; nun ist AE der vierte Theil von AB, somit muß LM der zwanzigste Theil von AB sein, also $LM = \frac{1}{20} AB$. Eben so folgt, daß $NO = \frac{2}{20} AB$, $PQ = \frac{3}{20} AB$, $RS = \frac{4}{20} AB$, ... $NT = \frac{7}{20} AB$, ... $PU = \frac{18}{20} AB$, ... ist.

Die Geraden CE, HF, JG, KB heißen Transversalen.

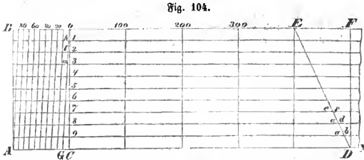
Es ist von selbst einleuchtend, daß die Theilung einer Geraden in mehrere gleiche Theile mittelst Transversalen nur dann Statt finden kann, wenn sich die Zahl der verlangten Theile in zwei Faktoren zerlegen läßt. Der eine Faktor zeigt an, in wie viel gleiche Theile die Gerade unmittelbar zu theilen ist, oder wie viele Transversalen man zu ziehen hat; und der andere Faktor, wie viele gleiche Theile man auf den Senkrechten aufzutragen hat.

Die Theilung einer Geraden mittelst Transversalen wird insbesondere bei der Konstrukzion von verjüngten Maßstäben angewendet. Unter einem verjüngten Maßstabe versteht man nämlich einen Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Maße sammt ihren Unterabtheilungen nach einem bestimmten Verhältnisse verkleinert aufgetragen sind.

§. 71.

2. Einen tausendtheiligen Maßstab zu verfertigen.

Fig. 104.



Man trage (Fig. 104) auf einer Geraden AX 10 gleiche Theile auf, deren jeder 100 Einheiten vorstellen soll, so daß auf die ganze Linie 1000 Einheiten kommen. In den Endpunkten errichte man zwei Senkrechte, trage darauf wieder 10 beliebig große jedoch gleiche Theile auf, und ziehe durch die Endpunkte eine Gerade, welche ebenfalls in 10 gleiche Theile ge-

theilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspunkte gerade Linien, welche alle entweder auf AX senkrecht stehen oder mit AX parallel sind. Um nun einen Theil AC wieder in 10 gleiche Theile zu theilen, darf man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale DE ziehen; wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Dab und DEF muß das Verhältniß ab:EF dem Verhältnisse Db:DF gleich sein; nun ist Db der 10te Theil von DF, also muß auch ab der 10te Theil von EF oder von AC sein; eben so enthält cd 2 solche Theile, ef 3 Theile u. s. w. Diese Theile werden nun sowohl auf AC als Bo aufgetragen. Endlich zieht man durch o und G, so wie durch je zwei folgende Theilungspunkte Transversalen, und schreibt an die Theilungspunkte die Zahlen so hin, wie man sie in der Figur sieht.

Die Gerade AC enthält nun 100 solche Theile, von denen auf die ganze untere Linie 1000 kommen; CG ist der 10te Theil von AC, enthält demnach 10 solche Theile; kl endlich ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke okl und oGC der 10te Theil von GC, und enthält somit einen solchen Theil, wie deren auf die ganze Gerade 1000 kommen, l2 enthält 2 solche Theile u. s. w.

Ein solcher Transversal-Maßstab dient sowohl dazu, um eine auf dem Papier verzeichnete Gerade zu messen, als auch, um eine Linie von bestimmter Länge auf dem Papiere aufzutragen.

Um eine gegebene gerade Linie zu messen, fasse man dieselbe mit dem Zirkel ab, setze dann die beiden Zirkelspitzen auf eine und dieselbe Parallellinie des Maßstabes, und zwar auf diejenige, wo die eine Spitze in eine Senkrechte, die andere in eine Transversale hineinfällt; die Senkrechte gibt sodann die Hunderter, die Transversale die Zehner, die Parallele die Einheiten der gemessenen Linie an. Wenn z. B. die eine Zirkelspitze in die Senkrechte 400, und die andere genau in 0 eintrifft, so ist die Länge der Linie 400; würde die zweite Zirkelspitze auf 60 fallen, so hätte sie 460 Theile; würde sie zwischen 60 und 70 fallen, so müßte man mit dem Zirkel so weit herabrücken, bis die zweite Spitze genau auf eine Transversale trifft, während die erste Spitze auf derselben Parallelen in der Senkrechten 400 steht; wäre diese Parallele mit 3 bezeichnet, so enthält die gemessene Gerade 463 Theile.

Um umgekehrt von dem Maßstabe eine gegebene Länge, z. B. 300 abzufassen, setze man die eine Zirkelspitze in 300, die andere in 0 ein; um 320 abzufassen, setze man die eine Zirkelspitze in 300, die andere in 20 ein; um 327 abzutragen, suche man die durch 7 gehende Parallele auf, setze auf derselben die eine Spitze in die Senkrechte 300, die andere in die Transversale 20.

3. *Es soll ein verjüngter Maßstab verzeichnet werden, auf welchem 1 Zoll a Klafter vorstellt, und von dem man noch b Klafter abtragen kann.*

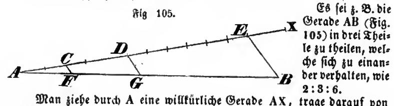
Man untersuche, der wievielte Theil von a die abzulesende Größe b ist, indem man a durch b dividirt, sodann zerlege man $\frac{a}{b}$ in zwei Faktoren m und n, theile einen Zoll in m Theile, und trage auf den Senkrechten n Theile auf. Das weitere Verfahren ist dasselbe, wie bei jedem Transversal-Maßstabe.

Wollte man z. B. von einem verjüngten Maßstabe, wo 1 Zoll 10 Klafter vorstellt, noch Fuß ablesen, so müßte man, da hier $a = 10$, $b = \frac{1}{6}$, also $\frac{a}{b} = 10 \times 6$ ist, einen Zoll in 10 gleiche Theile theilen, und auf den Senkrechten 6 Theile auftragen.

§. 72.

4. Eine gegebene Gerade nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Fig 105.

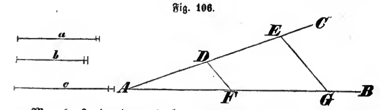


Es sei z. B. die Gerade AB (Fig. 105) in drei Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten, wie 2 : 3 : 6.

Man ziehe durch A eine willkürliche Gerade AX, trage darauf von A bis C 2 gleiche Theile, von C bis D 3 eben solche Theile, von D bis E 6 Theile, und ziehe EB. Zieht man nun CF ∥ DG ∥ EB, so ist AF : FG : GB = 2 : 3 : 6.

5. Zu drei Geraden die vierte Proporzionale zu finden.

Fig. 106.

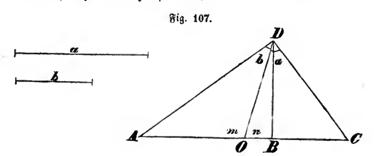


Man konstruire einen willkürlichen Winkel ABC (Fig. 106), mache AD = a, DE = b, AF = c, ziehe DF, und damit parallel die EG, so ist FG die vierte Proporzionale zu a, b, c. Es ist nämlich, wegen DF ∥ EG, AD : DE = AF : FG, oder a : b = c : FG.

Um zu den Linien a und b die dritte stetige Proporzionale zu finden, darf man nur b = c, und somit DE = AF machen.

6. Zwischen zwei Geraden die mittlere geometrische Proporzionale zu finden.

Fig. 107.



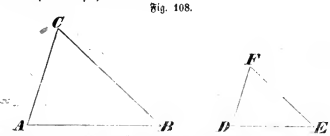
Man trage (Fig. 107) auf einer Geraden $AB = a$, $BC = b$ auf, und errichte in B eine Senkrechte.

Es handelt sich nun darum, in dieser Senkrechten einen solchen Punkt D auszumitteln, daß das Dreieck ADC bei D rechtwinklig werde, weil dann die Senkrechte DB die mittlere Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten AB und BC der Hypothenuse sein muß. Um jenen Punkt D zu finden, halbire man AC in O und beschreibe aus O mit dem Halbmesser $AO = OC$ einen Bogen; der Durchschnitt dieses Bogens mit der früher errichteten Senkrechten ist der gesuchte Punkt D; denn es ist $m = a + C = 2a$, $n = b + A = 2b$, also $m + n = 2(a + b)$, folglich $a + b = \frac{m+n}{2}$, nun ist $m + n = 2R$, somit $a + b = R$; der Winkel ADC ist also ein rechter. Ist aber das $\triangle$ ADC bei D rechtwinklig, und DB senkrecht auf die Hypothenuse AC, so muß $AB : BD = BD : BC$, oder $a : BD = BD : b$ sein. Die BD ist also die gesuchte mittlere Proporzionale zwischen a und b.

§. 73.

7. Ein Dreieck zu verzeichnen, welches mit dem Dreiecke ABC (Fig. 108) ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des andern Dreieckes ein bestimmtes Verhältniß haben.

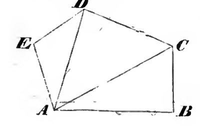
Fig. 108.

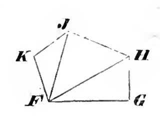


Es sei m:n das Verhältniß zwischen den Seiten des gegebenen und denen des verlangten Dreieckes. Man suche zu m, n, AB die vierte Proporzionale; sie sei DE. In den Endpunkten dieser Geraden DE konstruire man zwei Winkel, welche den Winkeln A und B gleich sind; ihre Schenkel schneiden sich in F, und es ist DEF das verlangte Dreieck.

8. Ein Vieleck zu konstruiren, das mit dem Vielecke ABCDE (Fig. 109) ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Vieleckes ein bestimmtes Verhältniß haben.

Fig. 109.





Sollen sich die Seiten des gegebenen Vieleckes zu denen des verlangten wie m:n verhalten, so suche man zu m, n, AB die vierte Proportionale; diese sei FG. Sodann zerlege man das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe über FG ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck FGH, über der Seite FH ein dem Dreiecke ACD ähnliches Dreieck FHJ, und über FJ das Dreieck FJK, welches mit ADE ähnlich ist. Das Vieleck FGHJK besteht nun aus Dreiecken, welche der Ordnung nach mit den Dreiecken des Vieleckes ABCDE ähnlich sind, also ist FGKJK $\sim$ ABCDE.

5. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstauffindung der Beweise und Auflösungen.

A. Lehrsätze.

§. 74.

1. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen spitzigen Winkel gleich haben.
2. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie den Winkel am Scheitel, oder auch den Winkel an der Grundlinie gleich haben.
3. Wenn zwei parallele Gerade von mehreren aus einem Punkte gezogenen Geraden geschnitten werden, so sind die Abschnitte der Parallelen zwischen jenen Geraden proporzionirt.
4. Wenn in einem Dreiecke durch den Scheitel eines Winkels eine Gerade zu der gegenüberliegenden Seite so gezogen wird, daß sich die Abschnitte dieser Seite wie die ihnen anliegenden Dreieckseiten verhalten, so wird der Winkel durch jene Gerade halbirt.
5. Wenn zwei ähnliche Dreiecke so gestellt werden, daß ihre gleichliegenden Seiten parallel sind, und man zieht durch die gleichliegenden Punkte gerade Linien, so müssen sich diese in einem und demselben Punkte schneiden.
6. Die Diagonalen eines Trapezes schneiden sich so, daß ihre Abschnitte einander proporzionirt sind.
7. Wenn man in zwei Dreiecken, welche dieselbe Grundlinie haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, mit der Grundlinie eine Parallele zieht, so sind die Stücke dieser Parallelen, welche in die beiden Dreiecke fallen, einander gleich
8. In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge so wie die gleichliegenden Seiten, oder auch wie die gleichliegenden Diagonalen.
9. In ähnlichen Dreiecken werden die Grundlinien von den Höhen proporzionirt geschnitten.
10. In jedem rechtwinkligen Dreiecke verhalten sich die Quadrate der Katheten so zu einander, wie die ihnen anliegenden Abschnitte der Hypothenuse.
11. Das Quadrat der Hypothenuse verhält sich zum Quadrate einer Kathete, wie die Hypothenuse zu dem dieser Kathete anliegenden Abschnitte der Hypothenuse.
12. Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich sind, so ist das Produkt ihrer Hypothenusen gleich der Summe aus den Produkten der gleichliegenden Katheten.

B. Aufgaben.

§. 75.

1. Eine Gerade zu verzeichnen, welche $\frac{m}{n}$ einer gegebenen Geraden beträgt.
2. Eine Gerade in zwei Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten, wie zwei gegebene Gerade.
3. Eine Gerade so in zwei Theile zu theilen, daß eine andere gegebene Gerade die mittlere Proporzionale zwischen beiden Theilen ist.
4. In einem spitzigen Winkel ein Rechteck einzuschreiben, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.
5. Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, daß die dadurch an den Schenkeln abgeschnittenen Stücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.
6. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie in diesem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

V. Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

1. Gleichheit der Flächen.

Lehrsätze.

§. 76.

1. Zwei Parallelogramme, welche dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

Wegen der gleichen Höhe der Parallelogramme müssen erstlich die der gemeinschaftlichen Grundlinie gegenüberstehenden Seiten in einer geraden Linie liegen. Im Beweise sind dann drei Fälle zu unterscheiden.

a) Wenn die der Grundlinie gegenüberstehenden Seiten ein Stück gemeinschaftlich haben, wie in den Parallelogrammen ABCD und ABEF (Fig. 110). Die Dreiecke ADF und BCE sind kongruent; denn es ist AD = BC, AF = BE, $<$DAF = CBE. Fügt man nun zu jedem dieser gleichen Dreiecke noch das Trapez ABCF hinzu, so muß auch $\triangle$DFA + ABCF = $\triangle$BCE + ABCF, oder ABCD = ABEF sein.

Fig. 110.

b) Wenn die der Grundlinie gegenüberliegenden Seiten nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, wie in den Parallelogrammen ABCD und ABEC (Fig. 111).

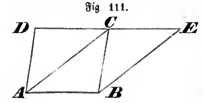


Fig 111.

Es ist das $\triangle$ ACD $\cong$ BEC, und wenn man zu jedem dieser Dreiecke noch das $\triangle$ ABC addirt, auch $\triangle$ ACD + ABC = $\triangle$ BEC + ABC, oder ABCD = ABEC.

c) Wenn die der Grundlinie gegenüberstehenden Seiten keinen Punkt ge-

meinschaftlich haben, wie in den Parallelogrammen ABCD und ABEF (Fig. 112).

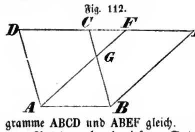


Fig. 112.

Es ist das △ ADF ≅ BCE. Nimmt man von jedem dieser gleichen Dreiecke das △ CFG hinweg, so müssen auch die Reste gleich sein, also das Trapez ADCG = BEFG, und, wenn man zu jedem dieser Trapeze das △ ABG addirt, sind auch die Summen, nämlich die Parallelogramme ABCD und ABEF gleich.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt:

Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches mit demselben eine gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 77.

2. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

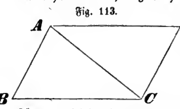


Fig. 113.

Betrachtet man das △ ABC (Fig. 113), und zieht durch die Punkte A und C mit den gegenüberstehenden Seiten parallele Linien, welche sich in D schneiden; so entsteht ein Parallelogramm ABCD, das mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und Höhe hat. Dieses Parallelogramm besteht nun aus den zwei kongruenten Dreiecken ABC und CDA; folglich ist das Dreieck ABC wirklich die Hälfte eines Parallelogramms ABCD, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

3. Jedes Trapez ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Summe der parallelen Seiten, und dessen Höhe die Höhe des Trapezes ist.

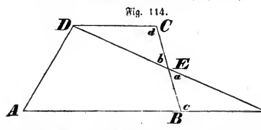


Fig. 114.

Es sei (Fig. 114) AB ∥ CD, somit ABCD ein Trapez. Halbirt man eine der nicht parallelen Seiten, z. B. die BC in E, und zieht durch D und E eine Gerade, welche die verlängerte AB in F schneidet, so ist das △ BEF ≅ OED, weil BE = CE, a = b als Scheitelwinkel, und c = d als Wechselwinkel; daher auch BF = CD. Addirt man zu jedem der gleichen Dreiecke CED und BEF das Viereck ABED, so muß auch △ CED + ABED = △ BEF + ABED, oder Trapez ABCD = △ AFD sein. Die Höhe dieses Dreieckes AFD ist nun

die Höhe des Trapezes; und die Grundlinie desselben ist $AF = AB + BF = AB + CD$, folglich gleich der Summe der beiden parallelen Seiten des Trapezes.

§. 78.

4. **In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten.**

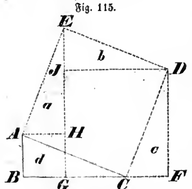


Fig. 115.

Es sei das $\triangle$ ABC (Fig. 115) in B rechtwinklig, so ist zu beweisen, daß das über AC beschriebene Quadrat der Summe aus dem Quadrate über AB und jenem über BC gleich ist, was wir so schreiben wollen:

$$\square AC = \square AB + \square BC.$$

Beschreibt man über der Hypothenuse AC das Quadrat ACDE, fällt von den Punkten D und E auf BC die Senkrechten DF und EG, und von den Punkten A und D auf EG die Senkrechten AH und DJ; so sind die rechtwinkligen Dreiecke AHE, EJD, CFD und ABC, welche wir nach der Ordnung durch a, b, c und d bezeichnen wollen, kongruent, weil sie eine gleiche Hypothenuse haben, und die der Hypothenuse anliegenden Winkel als Winkel, deren Schenkel entweder parallel sind oder auf einander senkrecht stehen, ebenfalls wechselseitig gleich sind.

Setzt man nun zu dem Fünfeck ACDJH einmal die Dreiecke a und b, das andere Mal aber die Dreiecke c und d hinzu, so müssen die Summen gleich sein, also

$$ACDJH + a + b = ACDJH + c + d,$$

oder

$$ACDE = ABGH + GFDJ.$$

Nun ist $ACDE = \square AC$; ferner ist leicht einzusehen, daß $ABGH = \square AB$, und $GFDJ = \square BC$ ist. Man hat daher

$$\square AC = \square AB + \square BC.$$

Dieß ist ein geometrischer Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes, den wir oben auf algebraischem Wege abgeleitet haben.

5. **Wenn das Quadrat einer Seite eines Dreieckes so groß ist als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Winkel, welcher der erstern Seite gegenüberliegt, ein rechter.**

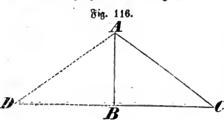


Fig. 116.

Wenn (Fig. 116) $\square AC = \square AB + \square BC$ ist, so muß der Winkel $ABC = R$ sein. Konstruirt man in B den rechten Winkel ABD, macht $BD = BC$, und zieht AD, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD $\square AD = \square AB + \square BD$, oder $\square AD$

$= \square AB + \square BC$; aber nach der Voraussetzung ist auch $\square AC = \square AB + \square BC$; es ist demnach $\square AD = \square AC$, und somit auch $AD = AC$. Vergleicht man nun die beiden Dreiecke ABC und ABD, so findet man, daß sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben, daß sie folglich kongruent sind, es müssen daher auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ABC und ABD gleich sein; aber ABD ist nach der Zeichnung ein rechter Winkel, folglich muß auch $ABC = R$ sein.

2. Berechnung des Flächeninhaltes.

§. 79.

Um den Flächeninhalt einer Figur zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Einheit des Maßes an, und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Fläche in der gegebenen Figur enthalten ist.

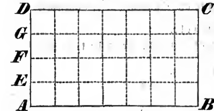
Als Einheit des Flächenmaßes wird ein Quadrat angenommen, dessen jede Seite der Längeneinheit gleich ist, und eine Quadratklafter ($\square^0$), ein Quadratfuß ($\square'$), ein Quadratzoll ($\square''$), . . eine Quadratmeile ($\square$ Meile) heißt, je nachdem die Länge einer Seite eine Klafter, einen Fuß, Zoll, . . eine Meile beträgt.

Die Ausmessung einer Fläche sollte eigentlich mittelst des wirklichen Auftragens der Quadratklafter, Quadratfuß, . . . geschehen; allein ein solches Verfahren wäre zu schwierig und in den meisten Fällen auch gar nicht ausführbar; daher sollen hier die Sätze abgeleitet werden, nach denen man, wenn die Länge der Linien, von denen die Größe der Figur abhängt, bekannt ist, daraus durch bloße Rechnung den Flächeninhalt bestimmen kann.

§. 80.

1. Flächeninhalt eines Rechteckes und eines Quadrates.

Fig. 117.



Es sei ABCD (Fig. 117) ein Rechteck, dessen Grundlinie $AB = 7^0$, und die Höhe $AD = 4^0$ ist.

Um den Flächeninhalt dieses Rechteckes zu bestimmen, sollte man, dem Begriffe des Messens zu Folge, eine Quadrat-Klafter wiederholt auf dem Rechtecke umlegen, und bestimmen, wie oft dieses Auftragen möglich ist. Längs der Grundlinie AB läßt sich eine Quadratklafter 7mal auftragen, diese Reihe von 7 Quadratklafter gehört zur Höhe AE; zur Höhe EF gehört eine zweite solche Reihe, welche ebenfalls 7 Quadratklafter enthält; eben solche Reihen gehören zu den Höhen FG und GD. Man erhält also 4 Reihen von Quadraten, deren jede 7 Quadratklafter enthält; es sind also zusammen 4mal $7 = 28 \square^0$. — Man sieht sogleich, daß, wie groß auch die Grundlinie und die Höhe sein mögen, doch immer so viele

Reihen von Quadratklaftern vorhanden sind, als die Höhe Klafter enthält, und daß in jeder Reihe so viele Quadratklafter vorkommen, als die Grundlinie Klafter enthält; daß man also in jedem Falle die ganze Anzahl Quadratklafter findet, wenn man die beiden Zahlen, welche die Grundlinie und Höhe in Klafter ausdrücken, mit einander multiplizirt.

Bei der Bestimmung der Fläche eines Rechteckes braucht man daher nicht erst wirklich die Einheit des Flächenmaßes selbst darauf aufzutragen; man darf nur mit der Längeneinheit die Grundlinie und die Höhe messen, und die dabei erhaltenen Zahlen mit einander multipliziren. Man hat somit den Satz:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt.

Die Benennung des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; sind z. B. die Seiten in Fuß ausgedrückt, so wird die Zahl, welche man als Flächeninhalt bekommt, Quadratfuß bedeuten; sind die Seiten in Zoll gegeben, so erhält man im Flächeninhalte Quadratzoll.

Da jedes Quadrat als ein Rechteck betrachtet werden kann, worin die Grundlinie der Höhe gleich ist, so hat man folgenden Satz:

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, wenn man eine Seite mit sich selbst multiplizirt, oder zum Quadrate erhebt.

Aus diesem Satze folgt: $1\square^0 = 6 \times 6 = 36\square'$,

$1\square' = 12 \times 12 = 144\square''$,

$1\square'' = 12 \times 12 = 144\square'''$,

$1\square$ Meile $= 4000 \times 4000 = 16000000\square^0$.

Eine Fläche, welche $1600\square^0$ enthält, wird ein *Joch* genannt; ein Joch ist also einem Quadrate gleich, dessen jede Seite 40^0 enthält. $1\square$ Meile $= 10000$ Joch.

Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates gegeben ist, und man will daraus die Länge einer *Seite* finden, so darf man nur eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multiplizirt den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. i. man darf nur aus dem Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen.

Beispiele.

1) Die Grundlinie eines Rechteckes ist 23', die Höhe 10'; wie groß ist der Flächeninhalt?

$23 \times 10 = 230\square'$.

2) Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie 5^0 3', und die Höhe 3^0 4' ist?

$5^0\,3' = 33'$ $\quad 33 \times 22 = 726\square'$

$3^0\,4' = 22'$ $\quad = 20\square^0\,6\square'$.

3) Ein Garten ist 21^0 4' lang und 13^0 5' breit; wie groß ist sein Flächenraum?

Länge $= 21^0\,4' = 130'$ $\quad 130 \times 83 = 10790\square'$

Breite $= 13^0\,5' = 83'$ $\quad = 299\square^0\,26\square'$.

4) Man bestimme den Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite 3^0 3' 7'' ist.

$4^0\,3'\,7'' = 331''$ $\quad 331^2 = 109561\square''$

$= 21\square^0\,4\square'\,121\square''$.

5) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächenraum $37\square^{0}\ 13\square'\ 64\square''$ ist?

$$37\square^{0}\ 13\square'\ 64\square'' = 193744\square''$$
$$\sqrt{193744} = 440{\cdot}16'' = 6^{0}\,8{\cdot}16''.$$

§. 81.

2. Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms.

Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches mit demselben eine gleiche Grundlinie und Höhe hat. Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines schiefen Parallelogramms ist gleich der Grundlinie multiplizirt mit der Höhe.

Ist z. B. die Grundlinie $= 12^{0}$, und die Höhe $= 7^{0}$, so ist

$$12 \times 7 = 84\square^{0}$$

der Flächeninhalt.

3. Flächeninhalt eines Dreieckes.

Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit ihm einerlei Grundlinie und Höhe hat, so muß man, um die Fläche eines Dreieckes zu erhalten, auch die Grundlinie mit der Höhe multipliziren, aber von diesem Produkte nur die Hälfte nehmen. Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

Z. B. die Grundlinie eines Dreieckes ist $3^{0}\,4'\,5''$, die Höhe $2^{0}\,1'\,6''$; wie groß ist der Flächenraum?

$$3^{0}\,4'\,5'' = 267'' \qquad 2^{0}\,1'\,6'' = 162'' \qquad \frac{267 \times 162}{2} = 267 \times 81 = 21627\square'' = 4\square^{0}\ 6\square'\ 27\square''.$$

Im rechtwinkligen Dreiecke nimmt man gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie an, wo sodann die andere Kathete die Höhe vorstellt; daher ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes gleich dem halben Produkte aus den beiden Katheten.

Z. B. Wie groß ist der Flächenraum eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $7^{0}\,4'$ und $5^{0}\,3'$ sind?

$$7^{0}\,4' = 46' \qquad 5^{0}\,3' = 33' \qquad \frac{46 \times 33}{2} = 23 \times 33 = 759\square' = 21\square^{0}\ 3\square'.$$

§. 82.

4. Flächeninhalt eines Trapezes.

Da ein Trapez einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundlinie die Summe der beiden parallelen Seiten, und dessen Höhe die Höhe des Trapezes ist, so folgt:

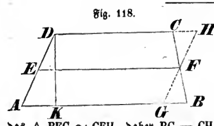
Der Flächeninhalt eines Trapezes wird berechnet, wenn man die Summe der beiden Parallelseiten mit der Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

Z. B. die parallelen Seiten eines Trapezes betragen $5^{0}\,4'$ und $4^{0}\,2'$, die Höhe $2^{0}\,4'$; wie groß ist der Flächeninhalt?

$$5^{0}\,4' = 34' \qquad 4^{0}\,2' = 26' \qquad \text{Summe} = 60' \qquad 2^{0}\,4' = 16'$$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{60 \times 16}{2} = 60 \times 8 = 480\square' = 13\square^{0}\ 12\square'.$$

Fig. 118.



Der Flächeninhalt eines Trapezes kann auch noch auf eine andere Art bestimmt werden.

Halbirt man in dem Trapeze ABCD (Fig. 118) die zwei nicht parallelen Seiten, zieht durch die Halbirungspunkte E und F eine Gerade, ferner GH ∥ AD, so ist das $\triangle$ BFG $\cong$ CFH, daher BG = CH. Es ist nun, wenn DK die Höhe des Trapezes vorstellt, der Flächeninhalt f des Trapezes

$$= (AB + CD) \times \frac{DK}{2}.$$

Aber

$$AB + CD = (AG + BG) + (DH - CH) = AG + DH = 2EF;$$

daher

$$f = 2EF \times \frac{DK}{2} = EF \times DK,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich der Geraden, welche die zwei nicht parallelen Seiten halbirt, mutiplizirt mit der Höhe.

§. 83.

Fig. 119.

5. Flächeninhalt eines regulären Vieleckes (Fig. 119).

Die Fläche eines regulären mecke wird man sicher finden, wenn man von der Mitte zu allen Eckpunkten gerade Linien zieht, und die dadurch entstehenden Dreiecke berechnet; da aber diese Dreiecke kongruent sind, so braucht man nur eines zu bestimmen, und die gefundene Fläche mit der Anzahl der Dreiecke zu multiplizieren. Der Flächeninhalt eines Dreieckes AOB ist gleich der Grundlinie AB multiplizirt mit der halben Höhe OH; daher die Fläche aller m Dreiecke gleich mmal AB multiplizirt mit der halben Höhe OH; mmal AB ist der Umfang des Vieleckes, OH ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite des Vieleckes. Daher hat man den Satz:

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Umfange multiplizirt mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Beispiele.

1) In einem regelmäßigen Zehnecke beträgt eine Seite 2° 1′ 3″, und der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite 2° 5′ 7″; wie groß ist der Flächeninhalt?

Seite 2° 1′ 3″ = 159″ $1590 \times \frac{211}{2} = 795 \times 211$
Umfang = 1590″   = 167745□″
Abstand 2° 5′ 7″ = 211″   = 32□° 12□′ 129□″.

2) Wie groß ist die Fläche eines regulären Sechseckes, dessen jede Seite 3′ 4″ beträgt?

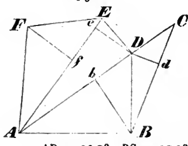
Man überzeugt sich leicht, daß im Dreiecke AOB jeder Winkel 60° beträgt, daß somit dieses Dreieck gleichseitig ist. Für ein gleichseitiges Dreieck aber, worin eine Seite 3′ 4″ ist, findet man die Höhe = 2′ 10·6″. Man hat daher

Seite 3′ 4″ = 40″ 240 × 17·3 = 4152□″
Umfang = 240″ = 28□′ 120□″
Abstand 2′ 10·6″ = 34·6″

§. 84.

6. Flächeninhalt irgend einer geradlinigen Figur.

Fig. 120.



Den Flächeninhalt einer geradlinigen Figur kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen:

a) Man zerlege die Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne jedes dieser Dreiecke, und addire alle Dreiecksflächen.

Es sei z. B. die Fläche des Sechseckes ABCDEF (Fig. 120) auszurechnen. Man zerlege dasselbe in Dreiecke, und es sei

AD = 20·7°, BC = 17·8°, AE = 21·3°;
Bb = 9·5°, Dd = 3·9°, De = 7°, Ff = 8·8°.

Man hat nun

$$\triangle ABD = \frac{AD \,.\, Bb}{2} = \frac{20{\cdot}7 \times 9{\cdot}5}{2} = 98{\cdot}32\,\square^{0}$$

$$\triangle BCD = \frac{BC \,.\, Dd}{2} = \frac{17{\cdot}8 \times 3{\cdot}9}{2} = 34{\cdot}71 \;\;,,$$

$$\triangle ADE = \frac{AE \,.\, De}{2} = \frac{21{\cdot}3 \times 7}{2} = 74{\cdot}55 \;\;,,$$

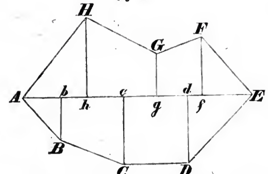
$$\triangle AEF = \frac{AE \,.\, Ff}{2} = \frac{21{\cdot}3 \times 8{\cdot}8}{2} = 93{\cdot}72 \;\;,,$$

Sechseck ABCDDF = 301·3□°

b) Man ziehe durch 2 Eckpunkte eine Gerade, und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte, so zerfällt die Figur in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und dann addirt werden. Dabei betrachtet man die Senkrechten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abschnitte der durch die Mitte gezogenen Geraden aber als Höhen. Es ist dabei nicht nöthig, die einzelnen für die Dreiecke und Trapeze erhaltenen Produkte durch 2 zu dividiren; man addirt vielmehr sogleich die ganzen Produkte, und dividirt erst die Summe durch 2. Um z. B. den Flächeninhalt des Vieleckes ABCDEFGH (Fig. 121) zu berechnen, ziehe man die Gerade AE, und fälle darauf die Senkrechten Bb, Cc, Dd, Ff, Gg, Hh.



Fig. 121.



Es sei nun
$Ab=5{\cdot}7^0$, $bh=3{\cdot}8^0$, $hc=5{\cdot}3^0$, $cg=\ \ 5^0$, $gd=4{\cdot}5^0$, $df=2{\cdot}3^0$, $fE=7{\cdot}6^0$;
$Bb=6{\cdot}2^0$, $Cc=10^0$, $Dd=9{\cdot}9^0$, $Ff=8{\cdot}8^0$, $Gg=6{\cdot}5^0$, $Hh=11{\cdot}7^0$.
Die Rechnung kann auf folgende Art zusammengestellt werden.

Bestandtheile der Figur.	Faktoren.		Produkte.
	Grundlinien oder Summen der Parallelseiten.	Höhen.	
Dreieck ABb	Bb = 6·2°	AB = 5·7°	35·34
Trapez BbcC	Bb + Cc = 16·2°	bc = 9·1°	147·42
„ CcdD	Cc + Dd = 19·9°	cd = 9·5°	189·05
Dreieck DdE	Dd = 9·9°	dE = 9·9°	98·01
„ FfE	Ff = 8·8°	fE = 7·6°	66·88
Trapez FfgG	Ff + Gg = 15·3°	fg = 6·8°	104·04
„ GghH	Gg + Hh = 18·2°	gh = 10·3°	187·46
Dreieck AhH	Hh = 11·7°	Ah = 9·5°	111·15
			939·15
	Figur ABCDEFGK		469·57 □°

3. Verhältniß der Flächen.

§. 85.

Heißt P die Fläche eines Parallelogramms, dessen Grundlinie G, und die Höhe H ist, so hat man $P = G \times H$. Haben p, g, h dieselben Bedeutungen für ein zweites Parallelogramm, so ist auch $p = g \times h$. Dividirt man nun die beiden Ausdrücke durch einander, so erhält man

$$P : p = G \times H : g \times h,$$

d. h. die Flächen zweier Parallelogramme verhalten sich so wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen.

Für $H = h$ wird $P : p = G : g$,

d. h. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich so wie ihre Grundlinien.

Für $G = g$ ist $P : p = H : h$,
d. h. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich so wie ihre Höhen.

Für $G = g$ und $H = h$ ist endlich $P = p$,
d. h. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Es ist von selbst klar, daß die hier für die Parallelogramme überhaupt abgeleiteten Verhältnisse auch für die Rechtecke Giltigkeit haben.

§. 86.

Nennt man D und d die Flächenräume zweier Dreiecke, deren Grundlinien G und g, und die Höhen H und h sind, so ist

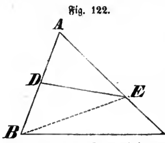
$$D = \frac{G \times H}{2} \text{ und } d = \frac{g \times h}{2},$$

daher $D : d = G \times H : g \times h$,
d. h. zwei Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien in die Höhen.

Für $H = h$ wird $D : d = G : g$; für $G = g$ hat man $D : d = H : h$; für $G = g$ und $H = h$ endlich ist $D = d$; welche drei Relazionen sich leicht durch Worte ausdrücken lassen.

Zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich so wie die Produkte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

Fig. 122.



Die Dreiecke BAC und DAE (Fig. 122) haben den Winkel A gemeinschaftlich, und es ist zu beweisen, daß die Proporzion $\triangle$ BAC : ADE = AB . AC : AD . AE Statt findet. — Man ziehe die Hilfslinie BE; die Dreiecke BAC und BAE haben nun, wenn AC und AE als Grundlinien betrachtet werden, gleiche Höhe, daher ist $\triangle$ BAC : BAE = AC : AE; eben so haben die Dreiecke BAE und DAE, wenn man AB und AD als Grundlinien annimmt, dieselbe Höhe, folglich auch $\triangle$ BAE : DAE = AB : AD. Multiplizirt man nun die gleichnamigen Glieder dieser beiden Proporzionen, so erhält man $\triangle$ BAC : DAE = AB . AC : AD . AE.

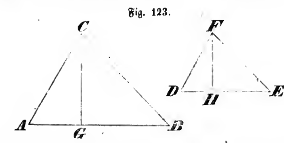
§. 87.

Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich so wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Es sei (Fig. 123) $\triangle$ ABC $\sim$ DEF. Allgemein ist $\triangle$ ABC : DEF = AB . CG : DE . FH. Nun ist AB : DE = AB : DE und auch CG : FH = AB : DE, daher durch Multiplikazion dieser beiden Proporzionen AB . CG : DE . FH = $AB^2 : DE^2$. Verbindet man diese Proporzion mit der ersten, so erhält man $\triangle$ ABC : DEF = $AB^2 : DE^2$. Wegen AB : DE =

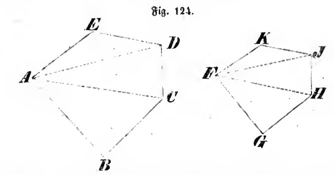
$AC : DF = BC : EF$ ist auch $AB^2 : DE^2 = AC^2 : DF^2 = BC^2 : EF^2$; folglich $\triangle ABC : DEF = AB^2 : DE^2 = AC^2 : DF^2 = BC^2 : EF^2$.

Fig. 123.



Zwei ähnliche Vielecke verhalten sich so wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Fig. 124.



Es sei (Fig. 124) das Vieleck $ABCDE \sim FGHJK$. Zieht man die Diagonalen AC, AD, FH, FJ, so ist das $\triangle ABC \sim FGH$, $\triangle ACD \sim FHJ$, $\triangle ADE \sim FJK$; daraus folgt

$$\triangle ABC : FGH = AB^2 : FG^2,$$
$$\triangle ACD : FHJ = CD^2 : HJ^2 = AB^2 : FG^2,$$
$$\triangle ADE : FJK = DE^2 : JK^2 = AB^2 : FG^2,$$

somit auch $(ABC + ACD + ADE) : (FGH + FHJ + FJK) = AB^2 : FG^2$,

oder $$ABCDE : FGHJK = AB^2 : FG^2.$$

Aus diesem Satze folgt:

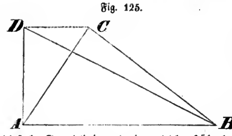
Zwei regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Seiten.

4. Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 88.

1. Ein jedes Dreieck in ein gleich großes rechtwinkliges zu verwandeln.

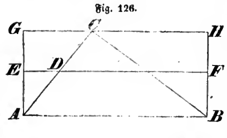
Fig. 125.



Um das △ ABC (Figur 125) in ein rechtwinkliges zu verwandeln, errichte man in A auf die AB eine Senkrechte, und ziehe durch C mit AB eine Parallele, welche jene Senkrechte in D trifft. Zieht man nun die BD, so ist das rechtwinklige △ BAD = BAC, weil beide Dreiecke dieselbe Grundlinie und eine gleiche Höhe haben.

2. Es soll ein Dreieck ABC (Fig. 126) in ein gleich großes Rechteck verwandelt werden.

Fig. 126.

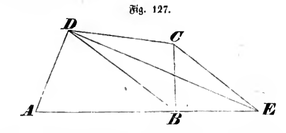


Man errichte in A und B Senkrechte auf AB, halbire die Seite AC in D und ziehe durch diesen Punkt eine Parallele mit AB, welche jene Senkrechten in E und F schneidet. Das Rechteck ABFE ist nun dem Dreiecke ABC gleich, weil jedes die Hälfte des Rechteckes ABHG ist.

§. 89.

3. Es soll ein Viereck ABCD (Fig. 127) in ein Dreieck verwandelt werden.

Fig. 127.



Man ziehe die BD, und damit durch C eine Parallele, welche die Verlängerung der AB in E schneidet. Zieht man nun die DE, so ist das △ AED dem Vierecke ABCD gleich. Denn es ist △ DBE = DBC, weil beide dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe haben; addirt man beiderseits das △ ABD dazu, so erhält man △ ADE = Viereck ABCD.

4. Ein jedes Viereck ABCD (Fig. 128) in ein Rechteck zu verwandeln.

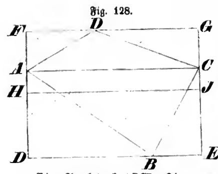


Fig. 128.

Man ziehe die Diagonale AC, und durch B und D damit parallele Linien, durch A und C zieht man auf AC Senkrechte, welche mit jenen zwei Parallelen das Rechteck DEGF bilden. Dieses Rechteck ist offenbar doppelt so groß als das Viereck ABCD, halbirt man daher DF in H, und zieht HJ ∥ DE, so ist das Rechteck DEJH gleich dem Vierecke ABCD.

5. Ein Rechteck ABCD (Fig. 129) in ein Quadrat zu verwandeln.

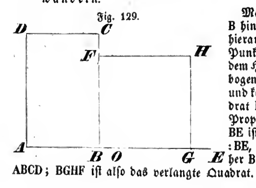


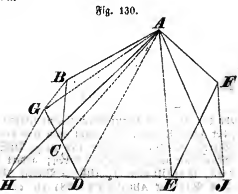
Fig. 129.

Man verlängere die AB über B hinaus, und mache BE=BC; hierauf halbire man die AE im Punkte O, beschreibe aus O mit dem Halbmesser AO einen Kreisbogen, welcher die BC in F trifft, und konstruire über BF das Quadrat BGHF. Da BF die mittlere Proporzionale zwischen AB und BE ist, so hat man AB : BF = BF : BE, oder AB : BF = BF : BC, daher $BF^2 = AB.BC$, oder BGHF = ABCD; BGHF ist also das verlangte Quadrat.

§. 90.

6. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 130) in ein Dreieck zu verwandeln.

Fig. 130.



Man ziehe die Diagonalen AC, AD, AE. Nun verwandelt man das Viereck ABCD in das Dreieck AGD, so erscheint das Sechseck ABCDEF in

ein Fünfeck AGDEF verwandelt. Sodann verwandle man das Viereck AGDE in ein Dreieck AHE, so hat man statt des gegebenen Sechseckes das Viereck AHEF. Wird endlich dieses letzte Viereck wieder in ein Dreieck AHJ verwandelt, so enthält dieses Dreieck AHJ denselben Flächenraum wie das gegebene Sechseck.

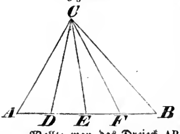
Da sich jedes Dreieck in ein Rechteck, und dieses in ein Quadrat verwandeln läßt, so folgt, daß auch jedes beliebige Vieleck in ein Rechteck oder ein Quadrat verwandelt werden kann.

5. Theilung geradliniger Figuren.

§. 91.

1. Ein Dreieck in mehrere gleiche Theile so zu theilen, daß alle Theilungslinien in demselben Eckpunkte zusammenlaufen.

Fig. 131.

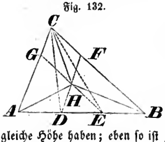


Um das Dreieck ABC (Fig. 131) z. B. in vier gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien durch den Punkt C gehen, theile man die gegenüberstehende Seite AB in vier gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte die Geraden CD, CE, CF. Die vier Dreiecke CAD, CDE, CEF, CBF sind nun wirklich einander gleich, weil sie gleiche Grundlinie und dieselbe Höhe haben.

Wollte man das Dreieck ABC nicht in gleiche, sondern in Theile, welche unter einander ein bestimmtes Verhältniß haben, theilen, so dürfte man nur die Grundlinie AB nach jenem Verhältnisse theilen und die Theilungspunkte mit C durch gerade Linien verbinden.

2. Ein Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von den Eckpunkten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

Fig. 132.



Man theile (Fig. 132) eine Seite AB in den Punkten D und E in 3 gleiche Theile, ziehe DF ∥ AC und EG ∥ BC; die vom Durchschnittspunkte H aus gezogenen Geraden AH, BH und CH sind die verlangten Theilungslinien.

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, ziehe man die Hilfslinien CD und CE. Es ist nun $\triangle$ ACH = ACD, weil beide dieselbe Grundlinie AC und gleiche Höhe haben; eben so ist $\triangle$ BCH=BCE, daher muß auch $\triangle$ ABH= CDE sein. Nun sind die Dreiecke ACD, CDE, BCE unter einander gleich, folglich müssen auch die Dreiecke ACH, ABH, BCH gleich sein.

Hätte man AB nicht in drei gleiche, sondern in drei durch ein gegebenes Verhältniß bestimmte Theile getheilt, so wäre dadurch auch das $\triangle$

ABC in drei Theile getheilt worden, welche in jenem Verhältnisse zu einander stehen.

3. Ein Dreieck in vier kongruente Dreiecke zu theilen.

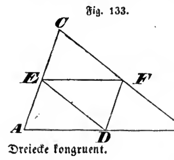


Fig. 133.

Man halbire (Fig. 133) jede Seite und ziehe durch je zwei Halbirungspunkte eine Gerade.

Die Gerade DE, welche die Halbirungspunkte D und E verbindet, muß mit BC parallel sein; eben so ist DF ‖ AC und EF ‖ AB. In den Dreiecken ADE, BDF, CEF und DEF sind nun alle drei Seiten als Parallele zwischen Parallelen wechselseitig gleich, folglich sind jene vier Dreiecke kongruent.

§. 92.

4. Ein Parallelogramm in mehrere gleiche Theile so zu theilen, daß alle Theilungslinien mit einer Seite parallel laufen.

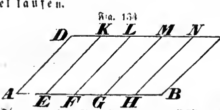


Fig. 134

Es sei (Fig. 134) das Parallelogramm ABCD z. B. in fünf gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit der Seite AD parallel laufen. Man theile die Seite AB in 5 gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte E, F, G, H die Geraden EK, FL, GM, HN parallel mit AD; so ist die Aufgabe gelöst. Die dadurch entstehenden Parallelogramme haben nämlich gleiche Grundlinien und eine gemeinschaftliche Höhe, und sind daher einander gleich.

Theilt man AB nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältnisse, und zieht durch die Theilungspunkte Parallele mit AD, so wird dadurch auch das Parallelogramm ABCD in Theile getheilt, welche in jenem Verhältnisse zu einander stehen.

5. Es soll ein Trapez in mehrere gleiche Theile so getheilt werden, daß jede Theilungslinie die beiden Parallelen durchschneidet.

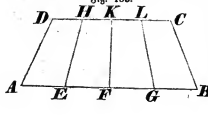


Fig. 135.

Um das Trapez ABCD (Fig. 135) auf die verlangte Weise, z. B. in vier gleiche Theile zu theilen, theilt man jede der beiden Parallelen in vier gleiche Theile; die Geraden EH, FK, GL sind, wie leicht zu zeigen ist, die gesuchten Theilungslinien.

6. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung im Beweisen und Auflösen.

A. Lehrsätze.

§. 93.

1. Wenn zwei Dreiecke, welche über derselben Grundlinie aufliegen, einander gleich sind, so müssen ihre Scheitel in einer zur Grundlinie parallelen Geraden liegen.
2. Wenn man in einem Dreiecke die Halbirungspunkte zweier Seiten nicht nur unter einander verbindet, sondern von ihnen auch zwei beliebige Parallele nach der dritten Seite zieht, so entstehet ein Parallelogramm, welches die Hälfte des Dreieckes ist.
3. Wenn man in einem Vierecke die Halbirungspunkte der vier Seiten durch Gerade verbindet, so schließen diese ein Parallelogramm ein, welches die Hälfte des Viereckes ist.
4. Wenn man zwei gegenüberliegende Seiten eines Viereckes halbirt, und den Halbirungspunkt einer jeden mit den Endpunkten der andern Seite verbindet, so sind die beiden dadurch entstandenen Dreiecke zusammen so groß als das Viereck.
5. Wenn man durch den Halbirungspunkt einer Diagonale eines Parallelogramms zu den Seiten desselben Parallele zieht, so wird das Parallelogramm in vier kongruente Theile getheilt.
6. Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzigen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und dem Abschnitte derselben, der zwischen dem Scheitel jenes Winkels und dem Fußpunkte der auf diese letztere Seite von dem gegenüberstehenden Scheitel gefällten Senkrechten liegt.
7. Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, mehr dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und dem Abschnitte derselben, der zwischen dem Scheitel jenes Winkels und dem Fußpunkte der auf diese letztere Seite von dem gegenüberstehenden Scheitel gefällten Senkrechten liegt.
8. Wenn man von einer Winkelspitze eines Dreieckes zur Mitte der gegenüberliegenden Seite eine Gerade zieht, so ist die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich dem doppelten Quadrate der halben getheilten Seite, mehr dem doppelten Quadrate der Theilungslinie.
9. In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.
10. Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes ähnliche Vielecke so konstruirt, daß die Seiten des rechtwinkligen Dreieckes die gleichliegenden Seiten der Vielecke bilden, so ist das Vieleck über der Hypothenuse gleich der Summe der Vielecke über den Katheten.

B. Aufgaben.

§. 94.

1. Ein Dreieck zu konstruiren, dessen Fläche gleich ist
   a) der Summe mehrerer Dreiecke von gleicher Höhe,
   b) der Differenz der Flächen zweier Dreiecke von gleicher Höhe.
2. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Fläche gleich ist
   a) der Summe mehrerer Quadrate,
   b) der Differenz der Flächen zweier Quadrate.
3. Ein Quadrat zu konstruiren, welches $\frac{m}{n}$ eines gegebenen Quadrates ist.
4. Ein Vieleck zu verzeichnen, welches $\frac{m}{n}$ eines andern Vieleckes und diesem ähnlich ist.
5. Ein Dreieck zu verwandeln
   a) in ein anderes Dreieck mit einem gegebenen Winkel,
   b) in ein Dreieck über derselben Grundlinie, welches gleichschenklig ist,
   c) in ein gleichseitiges Dreieck,
   d) in ein anderes Dreieck von gegebener Höhe,
   e) in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel.
6. Ein Parallelogramm zu verwandeln
   a) in ein anderes Parallelogramm, worin ein Winkel gegeben ist,
   b) in ein Parallelogramm von gegebener Höhe,
   c) in ein Parallelogramm über einer gegebenen Grundlinie,
   d) in ein Dreieck über derselben Grundlinie,
   e) in ein Dreieck von derselben Höhe,
   f) in einen Rhombus
7. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln.
8. Ein Dreieck durch Gerade, welche mit einer Seite parallel laufen, in gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.
9. Ein Dreieck in mehrere gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien in einem Punkte einer Seite zusammenlaufen.
10. Ein Trapez durch Gerade, welche mit den Parallelseiten parallel laufen, in mehrere gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Zweiter Abschnitt.

Krumme Linien und von ihnen begrenzte Figuren.

I. Die Kreislinie.

§. 95.

Die Kreislinie oder der Kreis ist, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, diejenige krumme Linie, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte oder Zentrum, dieselbe Entfernung hat. Diese Entfernung heißt der Halbmesser des Kreises.

Alle Punkte, deren Entfernung vom Zentrum kleiner ist als der Halbmesser, liegen innerhalb der Kreislinie; und alle Punkte, deren Abstand vom Zentrum größer als der Halbmesser ist, außerhalb der Kreislinie.

Damit ein Kreis vollkommen bestimmt sei, muß man den Mittelpunkt und die Länge des Halbmessers kennen.

1. Gerade Linien, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen.

§. 96.

Eine Gerade AB (Fig. 136), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt Sehne, Chorda.

Diejenige Sehne AC, welche durch den Mittelpunkt geht, ist der Durchmesser des Kreises.

Fig. 136.

Eine Gerade DE, welche den Kreisumfang in zwei Punkten durchschneidet, so daß sie Theile außerhalb und innerhalb des Kreises hat, heißt eine Durchschneidungslinie, Sekante. Eine Gerade FG, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, so daß alle andern Punkte außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie, Tangente.

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren:

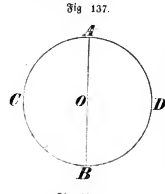
1. Der **Kreisabschnitt**, **Segment**, d. i. ein solcher Theil der Kreisfläche, welcher zwischen einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen liegt, wie ABMA.
2. Der **Kreisausschnitt**, **Sektor**, d. i. ein solches Stück der Kreisfläche, welches von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, wie AOHA.

Lehrsätze.

§. 97.

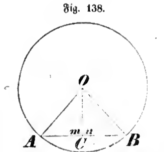
1. **Der Durchmesser halbirt die Kreisfläche und die Periferie.**

Fig 137.



Denkt man sich den Kreisabschnitt ACB (Fig. 137) so über den Kreisabschnitt ADB gelegt, daß AB als Sehne des Abschnittes ACB auf AB als Sehne des Abschnittes ADB falle, so wird auch der Bogen ACB den Bogen ADB vollkommen decken müssen, weil sonst nicht alle Punkte der beiden Kreisbögen vom Zentrum O gleich weit entfernt sein könnten. Die beiden Kreisabschnitte fallen also in allen Grenzen vollkommen zusammen, somit sind sie kongruent. Der Durchmesser AB halbirt daher sowohl die Kreisfläche, als den Kreisumfang.

Fig. 138.



2. **Wenn man das Zentrum des Kreises mit dem Halbirungspunkte einer Sehne durch eine Gerade verbindet, so steht diese auf der Sehne senkrecht.**

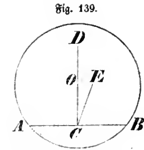
Es sei (Fig. 138) AC=CB, so muß OC $\perp$ AB, oder $m = n$ sein. — Weil AO = BO, AC = BC und OC = OC ist, so muß das $\triangle$ AOC $\cong$ BOC, und daher der Winkel $m = n$ sein.

3. **Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne eine Senkrechte zieht, so wird dadurch die Sehne halbirt.**

Ist OC $\perp$ AB, so muß AC = CB sein. — In den Dreiecken AOC und BOC sind zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberstehenden Winkel gleich, folglich sind die beiden Dreiecke kongruent, und somit auch die dritten Seiten AC und CB gleich.

4. **Wenn man in der Mitte einer Sehne auf dieselbe eine Senkrechte errichtet, so muß diese durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.**

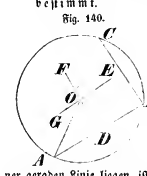
Fig. 139.



Es sei (Fig. 139) $AC = CB$, und $CD \perp AB$; so ist zu beweisen, daß CD durch den Mittelpunkt des Kreises durchgehen müsse. — Wäre dieses nicht der Fall, so müßte der Mittelpunkt des Kreises außerhalb der Senkrechten, z. B. in E liegen; daraus aber würde eine Ungereimtheit hervorgehen. Zieht man nämlich EC, so müßte diese Gerade, da sie das in E angenommene Zentrum mit der Mitte der Sehne AB verbindet, auf dieser Sehne senkrecht stehen, was jedoch nicht sein kann, da durch einen Punkt C auf eine Gerade AB nur eine Senkrechte gezogen werden kann. Aus der Annahme, daß der Mittelpunkt außerhalb der Senkrechten CD liege, geht also ein Widerspruch hervor, folglich ist diese Annahme falsch; CD muß also durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

5. **Durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte A, B und C (Fig. 140) ist ein Kreis vollkommen bestimmt.**

Fig. 140.

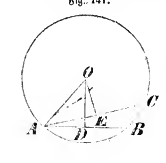


Zieht man die Geraden AB und BC, halbirt dieselben in D und E, und errichtet $DF \perp AB$ und $EG \perp BC$, so müssen sich diese Senkrechten in einem Punkte O durchschneiden. Betrachtet man nun A, B und C als Punkte eines Kreises, somit AB und BC als Sehnen desselben, so muß der Mittelpunkt dieses Kreises sowohl in der Senkrechten DF als in EG, folglich in ihrem Durchschnittspunkte O liegen; der Halbmesser dieses Kreises ist AO. Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist also sowohl der Mittelpunkt als der Halbmesser eines Kreises, somit der Kreis selbst vollkommen bestimmt.

§. 98.

6. **Von zwei Sehnen ist jene die größere, die den kleinern Abstand vom Mittelpunkte hat.**

Fig. 141.



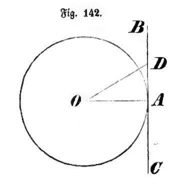
Es liege die Sehne AC (Fig. 141) näher am Mittelpunkte als jene AB, es sei nämlich die Senkrechte $OE < OD$; so läßt sich zeigen, daß $AC > AB$ ist. — Man ziehe AO, so ist $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2}$ und $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2}$. Wegen $OE < OD$ ist nun $AO^2 - OE^2 > AO^2 - OD^2$, also $AE > AD$; somit auch $2AE > 2AD$, oder $AC > AB$

Aus diesem Satze folgt, daß die

längste Sehne im Kreise diejenige ist, die durch den Mittelpunkt selbst durchgeht, d. i. der Durchmesser.

7. **Wenn man im Endpunkte eines Halbmessers darauf eine Senkrechte errichtet, so ist diese eine Tangente des Kreises.**

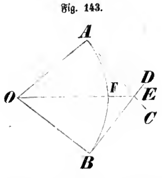
Fig. 142.



Es sei AB ⊥ AO (Fig. 142). Nimmt man in der Geraden AB irgend einen Punkt D, und zieht die OD, so ist in dem rechtwinkligen △ AOD die Hypothenuse DO größer als die Kathete AO; der Punkt D liegt also, weil seine Entfernung vom Mittelpunkte größer ist als der Halbmesser, außerhalb des Kreises. Dasselbe kann nun von jedem Punkte der Geraden AB, den Punkt A ausgenommen, gezeigt werden; die Gerade AB hat also mit der Kreislinie den einzigen Punkt A gemeinschaftlich, während alle andern Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen; folglich ist AB eine Tangente des Kreises.

8. **Wenn man in den Endpunkten eines Bogens auf die dahin gezogenen Halbmesser Senkrechte errichtet, und den Durchschnittspunkt mit dem Zentrum durch eine Gerade verbindet, so wird dadurch der Bogen halbirt.**

Fig. 143.



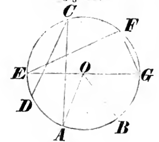
Ist (Fig. 143) AC ⊥ AO und BD ⊥ BO, wo dann AC und BD Tangenten des Kreises sind, so müssen sich diese in einem Punkte E schneiden; zieht man nun die Gerade OE, welche den Bogen AB in F schneidet, so läßt sich zeigen, daß dieser Bogen in F halbirt wird. — Die rechtwinkligen Dreiecke AEO und BEO haben die Hypothenuse OE gemeinschaftlich, ferner die Katheten OA und OB gleich, folglich sind sie kongruent; wenn aber die Dreiecke AEO und BEO über einander gelegt sich vollkommen decken, so müssen auch die Bögen AF und BF, da alle ihre Punkte von O gleich weit abstehen, in einander fallen; somit ist der Bogen AF = BF.

2. Winkel, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen.

§. 99.

Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt, dessen Schenkel also zwei Halbmesser sind, heißt ein **Mittelpunktswinkel**; ein Winkel dagegen, dessen Scheitel in dem Umfange des Kreises liegt, dessen Schenkel also Sehnen sind, wird ein **Umfangswinkel** genannt. Wenn die Schenkel eines Umfangswinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, so heißt derselbe ein **Winkel im Halbkreise**.

Fig. 144



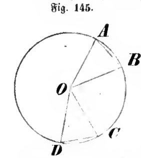
AOB (Fig. 144) ist ein Mittelpunktswinkel, ACD ein Umfangswinkel, EFG endlich ein Winkel im Halbkreise.

Lehrsätze.

§. 100.

1. **Zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Sehnen und Bögen.**

Fig. 145.



Es sei (Fig. 145) der Winkel AOB = COD. Denkt man sich den Kreisausschnitt COD so über den Kreisausschnitt ADB gelegt, daß die Halbmesser OC und OD auf die Halbmesser OA und OB fallen, was möglich ist, weil nach der Voraussetzung die Winkel COD und AOB gleich sind; so müssen, wegen der Gleichheit der Halbmesser, auch die Punkte C und D auf die Punkte A und B fallen, somit muß die Sehne CD = AB sein. Wenn aber die Sehne CD auf AB fällt, so müssen auch die Kreisbögen CD und AB vollkommen zusammenfallen, weil sonst nicht alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleiche Entfernung haben würden; also Bogen CD = AB.

Auf ähnliche Art lassen sich auch die zwei umgekehrten Sätze erweisen:

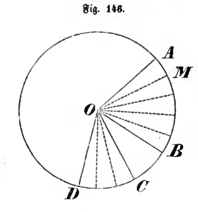
a) **Zu gleichen Bögen gehören gleiche Mittelpunktswinkel und gleiche Sehnen.**

b) **Gleichen Sehnen entsprechen gleiche Mittelpunktswinkel und gleiche Bögen.**

§. 101.

2. **In demselben Kreise verhalten sich die Mittelpunktswinkel gerade wie die Kreisbögen, auf welchen sie stehen.**

Fig. 146.



Es sei AM (Fig. 146) ein gemeinschaftliches Maß der Kreisbögen AB und CD, und zwar Bogen AB = m . AM, Bogen CD = n . AM; somit Bogen AB : Bogen CD = m : n.

Denkt man sich nun zu jedem Theilungspunkte der beiden Kreisbögen Halbmesser gezogen, so wird dadurch der Mittelpunktswinkel AOB in m, und COD in n Theile getheilt, deren jeder dem Winkel AOM gleich ist; man hat daher $\angle$ AOB = m . AOM, $\angle$ COD = n . AOM, folglich $\angle$ AOB : $\angle$ COD = m : n. Aus dieser und der früheren Proporzion folgt

$\angle$ AOB : $\angle$ COD = Bogen AB : Bogen CD.

Auf gleiche Weise läßt sich auch der Satz beweisen:

Im demselben Kreise verhalten sich die Mittelpunktswinkel gerade so, wie die zugehörigen Kreisausschnitte.

§. 102.

3. Der Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß, als der Umfangswinkel, wenn beide auf demselben Bogen aufstehen.

Beim Beweise dieses Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden.

a) Wenn ein Schenkel des Umfangswinkels durch das Zentrum durchgeht (Fig. 147).

AOB ist ein äußerer Winkel des Dreieckes BOC, daher AOB = BCO + CBO; aber der Winkel BCO = CBO, weil das $\triangle$ BOC gleichschenklig ist, somit ist der Mittelpunktswinkel AOB = OCB + OCB = 2ACB.

Fig. 147.

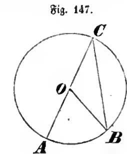
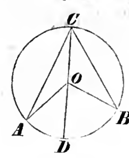


Fig. 148.

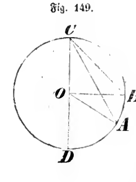


b) **Wenn die beiden Schenkel des Umfangswinkels auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen** (Fig. 148).

Man ziehe den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel AOD = 2ACD, und BOD = 2BCD, daher auch AOD + BOD = 2 (ACD + BCD), oder AOB = 2ACB.

c) **Wenn die beiden Schenkel des Umfangswinkels auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen** (Fig. 149).

Fig. 149.



Zieht man den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel BOD = 2BCD, und AOD = 2ACD; somit auch BOD — AOD = 2 (BCD — ACD), oder AOB = 2ACB.

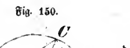
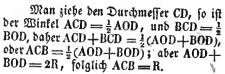
Da alle Umfangswinkel, welche auf einem gleichen Bogen aufstehen, gleich sind dem halben Mittelpunktwinkel über einem eben so großen Bogen, so folgt:

Umfangswinkel, welche in demselben Kreise über gleichen Bögen aufliegen, sind einander gleich.

§. 103.

4. **Jeder Winkel ACB (Fig. 150) im Halbkreise ist ein rechter.**

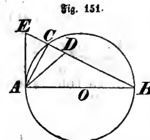
Fig. 150.

Man ziehe den Durchmesser CD, so ist der Winkel ACD = $\frac{1}{2}$AOD, und BCD = $\frac{1}{2}$ BOD, daher ACD + BCD = $\frac{1}{2}$(AOD + BOD), oder ACB = $\frac{1}{2}$(AOD + BOD); aber AOD + BOD = 2R, folglich ACB = R.

5. **Wenn man die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes halbirt, und aus dem Halbirungspunkte mit der halben Hypothenuse als Halbmesser einen Kreis beschreibt, so muß der Umfang dieses Kreises durch den Scheitel des rechten Winkels gehen.**

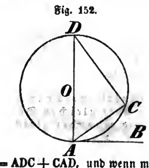
Fig. 151.



Es sei (Fig. 151) das $\triangle$ ACB bei C rechtwinklig, und AO = BO, so muß die aus O mit dem Halbmesser AO beschriebene Kreislinie durch C durchgehen.

Würde die Kreislinie nicht durch den Punkt C gehen, so müßte sie entweder die Kathete BC in einem Punkte D, oder die Verlängerung derselben in einem Punkte E schneiden. Im ersten Falle zieht man AD, und es müßte ADB als Winkel im Halbkreise ein rechter sein; es wären daher von A auf BC zwei Senkrechte gezogen, was nicht sein kann. Im zweiten Falle ziehe man AE, und es müßte wieder AEB als Winkel im Halbkreise ein rechter sein Man hätte also wieder von A auf BC zwei Senkrechte, was unmöglich ist. Da also die Kreislinie weder die Kathete BC selbst, noch auch ihre Verlängerung in irgend einem Punkte schneiden kann, so muß sie durch den Punkt C selbst gehen.

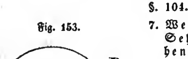
Fig. 152.



6. **Der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne bildet, ist gleich dem Umfangswinkel über dem Bogen, den die Sehne abschneidet.**

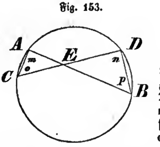
Es sei (Fig. 152) AB $\perp$ AO, so ist zu beweisen, daß der Winkel BAC = ADC ist.

In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD ist ADC + CAD = R; allein es ist auch BAC + CAD = R; folglich BAC + CAD = ADC + CAD, und wenn man beiderseits CAD wegnimmt, BAC = ADC.



§. 104.

Fig. 153.



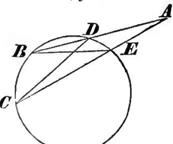
7. **Wenn in einem Kreise zwei Sehnen sich schneiden, so stehen ihre Abschnitte in verkehrtem Verhältnisse.**

Es schneiden sich (Fig. 153) die Sehnen AB und CD im Punkte E, und man ziehe die Sehnen AC und BD. In den Dreiecken ACE und BDE sind die Winkel m und n gleich, weil sie beide über demselben Bogen BC aufstehen; eben so ist o = p; daher $\triangle$ ACE $\sim$ BDE, und somit AE : DE = CE : BE, oder wenn man die innern Glieder verwechselt, AE : CE = DE : BE, w. z. b. w.

8. **Wenn man von einem Punkte A (Fig. 154) außerhalb des Kreises zu diesem zwei Sekanten AB und AC zieht,**

so stehen diese mit ihren außerhalb des Kreises liegenden Abschnitten AD und AE in verkehrtem Verhältnisse.

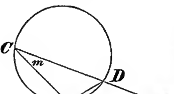

Fig. 154.



Man ziehe die Sehnen BE und CD. Die Dreiecke ABE und ACD haben nun den Winkel A gemeinschaftlich, ferner sind die Winkel B und C als Umfangswinkel über demselben Bogen DE gleich, daher $\triangle$ ABE $\sim$ ACD, und AB : AC = AE : AD.

9. Wenn von einem Punkte A (Fig. 155) außerhalb des Kreises zu diesem eine Tangente AB und eine Sekante AC gezogen sind, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proporzionale zwischen der Sekante und dem außerhalb des Kreises liegenden Abschnitte derselben.

Fig. 155.



Man ziehe die Sehnen BC und BD. Der Winkel n, den die Tangente mit der Sehne bildet, ist gleich dem Umfangswinkel m. Die Dreiecke ABC und ABD haben also A = A, und m = n; daher ist $\triangle$ ABC $\sim$ ABD, und AC : AB = AB : AD.

3. Dem Kreise eingeschriebene und umschriebene Vielecke.

§. 105.

Ein Vieleck, dessen alle Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke umschrieben.

Ein Vieleck, dessen alle Seiten den Kreis berühren, heißt dem Kreise umschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke eingeschrieben.

Am wichtigsten sind die regelmäßigen, dem Kreise eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke.

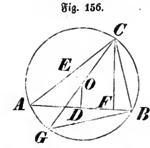
6*

Lehrsätze.

§. 106.

1. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis umschreiben.

Fig. 156.



Halbirt man (Fig. 156) zwei Dreieckseiten AB und AC, und errichtet in den Halbirungspunkten D und E Senkrechte, welche sich in O schneiden, so ist O der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises.

Um den Halbmesser dieses Kreises zu bestimmen, fälle man von C auf AB eine Senkrechte CF, ziehe den Durchmesser CG und die Sehne BG. Aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke CBG und CFA folgt $CG : AC = BC : CF$, daher $CG = \frac{AC \cdot BC}{CF}$, oder wenn man Zähler und Nenner mit AB multiplizirt, $CG = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{AB \cdot CF}$.

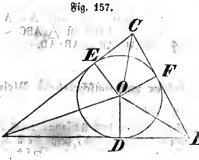
Setzt man nun $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und heißt f der Flächeninhalt des Dreieckes ABC, und R der Halbmesser des ihm umschriebenen Kreises, so ist, da man $AB \cdot CF = 2f$ setzen kann,

$$2R = \frac{abc}{2f}, \text{ also } R = \frac{abc}{4f},$$

d. i. der Halbmesser des einem Dreiecke umschriebenen Kreises ist gleich dem Produkte aller drei Seiten dividirt durch den vierfachen Flächeninhalt des Dreieckes.

2. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis einschreiben.

Fig. 157.



Man halbire (Fig. 157) zwei Dreieckswinkel, z. B. A und B; aus dem Punkte O, wo sich die Halbirungslinien schneiden, fälle man auf irgend eine Seite, z. B. AB, die Senkrechte OD. Es läßt sich nun zeigen, daß der aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OD beschriebene Kreis dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist.

Man fälle von O Senkrechte auch auf AC und BC. Aus der Kongruenz der Dreiecke AOD und AOE folgt nun $OD = OE$, und weil $\triangle BOD \cong BOF$ ist, so hat man auch $OD = OF$. Da also $OD = OE = OF$, so wird der Umfang des aus O mit dem Halbmesser OD beschriebenen Krei-

ses durch die Punkte D, E, F gehen, und weil in diesen Punkten die Seiten AB, AC, BC auf den Halbmessern senkrecht stehen, somit Tangenten des Kreises sind, so ist wirklich der Kreis dem Dreiecke eingeschrieben.

Um den Halbmesser dieses Kreises darzustellen, sei wieder $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, der Flächeninhalt des Dreieckes ABC heiße f, und r der Halbmesser des ihm eingeschriebenen Kreises. Es ist $\triangle BOC + AOC + AOB = f$ oder $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = f$, woraus $r = \frac{2f}{a+b+c}$ folgt, d. h. der Halbmesser des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises ist gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreieckes dividirt durch den Umfang desselben.

§. 107.

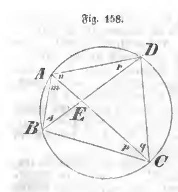


Fig. 158.

3. **In jedem Vierecke, welches einem Kreise eingeschrieben ist, betragen je zwei gegenüberstehende Winkel zusammen zwei Rechte.**

Man ziehe (Fig. 158) die Diagonalen AC und BD; es ist dann der Winkel $p = r$, $q = s$. In dem Dreiecke ABD ist nun

$$m + n + r + s = 2R,$$

daher auch

$$m + n + p + q = 2R,$$

oder

$$A + C = 2R.$$

Da die Summe aller Winkel eines Viereckes gleich ist vier Rechten, so muß auch $B + D = 2R$ sein.

§. 108.

4. **Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis ein- und umschreiben.**

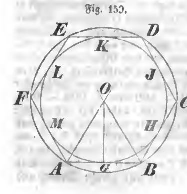


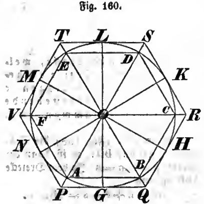
Fig. 159.

Es sei ABCDEF (Fig. 159) ein regelmäßiges Polygon. Halbirt man zwei Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbirungslinien die Eigenschaft, daß er von allen Seiten und eben so von allen Eckpunkten gleichweit absteht. Fällt man daher auf die Vielecksseiten von O aus Senkrechte, welche in den Punkten G, H, J, K, L, M eintreffen, und beschreibt aus O mit OG als Halbmesser einen Kreis, so muß die Periferie desselben durch die Punkte

G, H, J, K, L, M gehen, und da die Seiten des Vieleckes Tangenten zu diesem Kreise sind, so ist dieser dem Vielecke eingeschrieben. Beschreibt man eben so aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OA eine Kreislinie, so muß dieselbe durch alle Eckpunkte A, B, C, D, E, F gehen, und ist somit dem Vielecke umschrieben.

5. Einem Kreise läßt sich jedes verlangte regelmäßige Vieleck ein- und umschreiben, vorausgesetzt, daß der Umfang des Kreises in jede verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Fig. 160.



Es sei (Fig. 160) die Peripherie in so viele gleiche Theile getheilt, als das Vieleck Seiten haben soll, nämlich der Bogen AB = BC = CD = . . ., und man ziehe die Sehnen AB, BC, CD, . . .

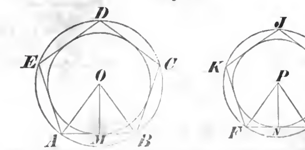
In dem Vielecke ABCD . . . sind nun alle Seiten AB, BC, CD, . . . als Sehnen, welche zu gleichen Bögen gehören, einander gleich, eben so sind die Winkel A, B, C, . . . gleich, weil sie auf gleichen Bögen aufstehen; das dem Kreise eingeschriebene Vieleck ist demnach ein regelmäßiges.

Zieht man die Halbmesser OA, OB, OC, . . ., so sind die Mittelpunktswinkel AOB, BOC, COD, . . . gleich; auch werden diese Winkel durch die Senkrechten OG, OH, OK, . . ., welche auf die Sehnen AB, BC, CD, . . . gefällt werden, halbirt; woraus folgt, daß auch die Winkel GOH, HOK, KOL, . . . durch die Halbmesser OB, OC, OD, . . . halbirt werden. Man ziehe nun durch die Punkte G, H, K, . . . Senkrechte auf die betreffenden Halbmesser, so müssen sich je zwei aufeinander folgende Senkrechte in einem Punkte schneiden, und man erhält ein dem Kreise umschriebenes Polygon PQRS . . . Wenn man den Durchschnittspunkt Q zweier Tangenten GQ und HQ mit dem Mittelpunkte O verbindet, so muß die Verbindungslinie OQ den Bogen GBH, folglich auch den Mittelpunktswinkel GOH halbiren; dieser Winkel wird aber auch von dem Halbmesser OB halbirt, daher müssen die Linien OQ und OB zusammenfallen, oder es liegt der Punkt Q in der Verlängerung des Halbmessers OB. Eben so folgt, daß die Punkte R, S, . . . in den Verlängerungen der Halbmesser OC, OD, . . . liegen. Weil das $\triangle$ POQ $\sim$ AOB und $\triangle$ QOR $\sim$ BOC, so ist PQ : AB = OQ : OB und QR : BC = OQ : OB, daher PQ : AB = QR : BC, und wegen AB = BC auch PQ = QR; eben so kann man zeigen, daß QR = RS, RS = ST, u. s. w. ist. Weil ferner die Winkel P, Q, R, . . . den Winkeln A, B, C, . . . gleich sind, indem ihre Schenkel parallel laufen, und A = B = C = . . . ist, so muß auch P = Q = R = . . . sein. Das dem Kreise umschriebene Vieleck PQRS . . . hat also gleiche Seiten und gleiche Winkel, ist somit regelmäßig.

§. 109.

6. **In regelmäßigen Vielecken von gleich viel Seiten verhalten sich die Umfänge wie die Halbmesser der diesen Vielecken eingeschriebenen oder umschriebenen Kreise, und die Flächeninhalte wie die Quadrate eben dieser Halbmesser.**

Fig. 161.



Es seien (Fig. 161) die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK regelmäßig; ihre Umfänge heißen U und u, ihre Flächenräume F und f.

Da die beiden regelmäßigen Vielecke gleich viel Seiten haben, so sind sie ähnlich, daher hat man

$$U:u = AB:FG \text{ und } F:f = AB^2:FG^2.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABO und FGP folgt aber

$$AB:FG = OM:PN = OA:PF;$$

daher ist

$$U:u = OM:PN \text{ und } F:f = OM^2:PN^2$$
$$= OA:PF \qquad = OA^2:PF^2.$$

§. 110.

Fig. 162

7. **Die Seite des regelmäßigen einem Kreise eingeschriebenen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises.**

Es sei das Sechseck ABCDEF (Fig. 162) regelmäßig.

Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist gleich $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$, also ist $A = B = 120^\circ$, und $m = n = 60^\circ$, daher muß auch $p = 60^\circ$, und daher das Dreieck ABO gleichseitig sein; folglich ist AB=AO.

§. 111.

8. **Aus der Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes kann die Seite eines demselben Kreise eingeschriebennn regelmäßigen Vieleckes von doppelt so viel Seiten bestimmt werden.**

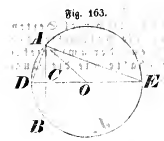


Fig. 163.

Es sei AB (Fig. 163) die Seite des dem Kreise eingeschriebenen nseitigen regulären Vieleckes. Zieht man senkrecht darauf den Halbmesser OD, so ist die Sehne AD die Seite des eingeschriebenen 2nseitigen regelmäßigen Vieleckes, und es handelt sich darum, diese Seite AD aus AB und dem Halbmesser OD zu bestimmen.

Man setze $AB = s_n$ und $DO = r$, verlängere den Halbmesser DO bis E, und ziehe die Geraden AO und AE. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACO folgt $CO^2 = AO^2 - AC^2 = r^2 - \frac{s_n^2}{4}$, daher

$$CO = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}},$$

und somit

$$CD = DO - CO = r - \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}.$$

Aus dem bei A rechtwinkligen Dreiecke DAE hat man ferner $DE : AD = AD : CD$, also $AD^2 = DE . CD$; oder wenn man für DE und CD ihre Werthe substituirt,

$$AD^2 = 2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}\right) = r^2\left(2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}\right), \text{ und}$$

$$AD = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

Wird AD durch s_{2n} ausgedrückt, so ist also

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

9. Aus der Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes läßt sich die Seite eines demselben Kreise umschriebenen regulären Vieleckes von eben so viel Seiten bestimmen.

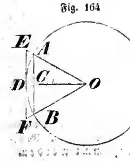


Fig. 164

Es sei (Fig. 164) $AB = s_n$ die Seite des einem Kreise eingeschriebenen nseitigen regelmäßigen Vieleckes, und der Halbmesser dieses Kreises $AO = r$. Fällt man von O auf AB eine Senkrechte, welche die Periferie in D trifft, und errichtet in D auf den Halbmesser OD eine Senkrechte, welche die verlängerten Halbmesser OA und OB in den Punkten E und F schneidet, so ist EF die Seite des umschriebenen nseitigen regulären Polygons.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EFO und ABO folgt nun $EF : AB = DO : CO$, oder weil

$$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} \text{ ist,}$$

$$EF : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ woraus man}$$

$$EF = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}} = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}} \text{ erhält.}$$

Drückt man EF durch S_n aus, so besteht demnach die Formel

$$S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

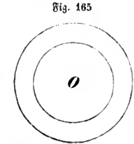
4. Lage zweier Kreise gegen einander.

§. 112.

In Beziehung auf die gegenseitige Lage zweier Kreise sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden; entweder haben sie denselben Mittelpunkt, oder nicht.

Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, nennt man konzentrisch, wie in Fig. 165.

Fig. 165



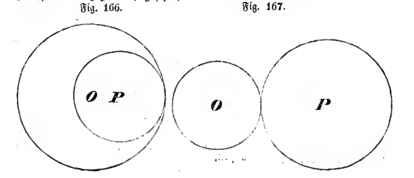
Die Fläche, welche zwischen den Peripherien zweier konzentrischer Kreise enthalten ist, wird ein Ring genannt.

Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man exzentrisch, und die Gerade, welche diese Mittelpunkte verbindet, die Zentrilinie. Zwei exzentrische Kreise können sich entweder berühren, oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben.

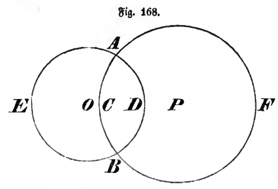
Wenn der eine Kreis innerhalb des andern liegt, wie in Fig. 166, so sagt man: die Kreise berühren sich von innen; im entgegengesetzten Falle, wie in Fig. 167, geschieht die Berührung von außen.

Fig. 166. Fig. 167.



Zwei Kreise durchschneiden sich, wenn ihre Umfänge zwei Punkte gemeinschaftlich haben. In mehr als zwei Punkten können die Periferien zweier Kreise nicht zusammentreffen; denn hätten sie drei gemeinschaftliche Punkte, so müßten sie ganz zusammenfallen und würden nur eine einzige Kreislinie bilden.

Fig. 168.



Das gemeinschaftliche Stück ACBD (Fig. 168) der beiden Kreisflächen heißt eine Linse; jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke, wie AEBC und AFBD, ein Mond.

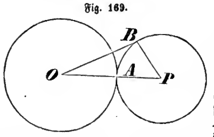
Exzentrische Kreise, die sich weder berühren noch schneiden, können wieder in einander oder außer einander liegen.

Lehrsätze.

§. 113.

1. **Wenn die Zentrilinie zweier Kreise gleich ist der Summe ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kreise von außen.**

Fig. 169.



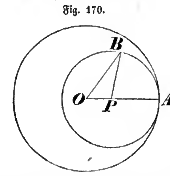
Es sei (Fig. 169) OP die Zentrilinie zweier Kreise, die mit den Halbmessern OA und PA beschrieben sind, wo also

$$OP = OA + PA$$

ist. Die beiden Kreise treffen offenbar in dem Punkte A zusammen. Nimmt man aber außer A irgend einen andern Punkt der zweiten Kreisperiferie, z. B. B, und zieht OB und PB, so ist in dem $\triangle$ OPB $OB > OP - BP$, oder $OB > OA$, d. h. der Punkt B liegt außerhalb des ersten Kreises. Dasselbe gilt von allen Punkten des zweiten Kreisumfanges, den Punkt A ausgenommen, den beide Periferien gemeinschaftlich haben. Die zwei Kreise berühren sich also von außen.

2. **Wenn die Zentrilinie zweier Kreise gleich ist dem Unterschiede ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kreise von innen.**

Fig. 170.



Es sei (Fig. 170) OP die Zentrilinie zweier Kreise, die mit den Halbmessern OA und PA beschrieben sind, wo also

$$OP = OA - PA$$

ist. Die Umfänge der beiden Kreise haben erstlich den Punkt A gemeinschaftlich. Betrachtet man aber irgend einen andern Punkt in dem Umfange des kleinern Kreises, z. B. B, und zieht OB und PB, so ist in dem Dreiecke OBP

$OB < OP + BP$ oder $OB < OP + AP$, also $OB < OA$, d. h. der Punkt B liegt innerhalb des größern Kreises. Da sich dieses von allen Punkten des kleinern Kreisumfanges, den Punkt A ausgenommen, beweisen läßt, so berühren sich die beiden Kreise von innen.

5. Ausmessung des Kreises.

§. 114.

Jedes Messen setzt eine Vergleichung der zu messenden Größe mit der Maßeinheit voraus. Die Einheit des Linienmaßes ist eine gerade Linie, die Einheit des Flächenmaßes eine von geraden Linien begrenzte Fläche, das Quadrat. Wegen der verschiedenartigen Natur der geraden und krummen Linien, der gerad- und krummlinigen Figuren kann nun aber weder die Kreislinie mit einer Geraden, noch die Kreisfläche mit einem Quadrate unmittelbar verglichen werden; man muß daher bei der Messung des Kreises zu einem mittelbaren Verfahren Zuflucht nehmen, welches auf folgenden Betrachtungen beruhet.

Wenn man dem Kreise ein regelmäßiges Polygon einschreibt und ein anderes von eben so viel Seiten umschreibt, so ist, so groß auch die Anzahl der Seiten eines jeden Polygons sein mag, stets der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes kleiner, der Umfang des umschriebenen Vieleckes größer als die Periferie des Kreises. Heißen s_n und S_n die Seiten, u_n und U_n die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen nseitigen regelmäßigen Polygons, und r der Halbmesser des Kreises, so hat man

$$u_n = ns_n \text{ und } U_n = nS_n = ns_n \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}, \text{ weil } S_n = \frac{2 s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}} \text{ ist.}$$

Je mehrere Seiten die beiden Vielecke haben, desto kleiner wird s_n, desto mehr nähert sich dann $\frac{s_n^2}{r^2}$ der Nulle, daher der Bruch $\frac{2}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}$ dem Aus-

drucke $\frac{2}{\sqrt{4}} = 1$, folglich U_n der Größe ns_n, die zugleich den Umfang u_n bezeichnet. Man kann also, wenn die Anzahl der Seiten n hinlänglich groß angenommen wird, den Unterschied zwischen dem Umfange des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons kleiner machen, als jede noch so kleine angebbare Größe. Die Periferie des Kreises liegt aber immer zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons, und fällt daher mit ihnen zusammen, wenn deren Seitenanzahl unendlich groß angenommen wird. Daraus folgt:

Der Kreis kann als ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten betrachtet werden.

Auf Grundlage dieses Satzes kann nun sowohl die Länge der Periferie als der Flächeninhalt des Kreises bestimmt werden.

a) Länge der Kreislinie.

§. 115.

Da sich die Umfänge zweier regelmäßigen Vielecke von gleich viel Seiten, wie groß auch ihre Anzahl sein mag, so zu einander verhalten, wie die Halbmesser der ihnen eingeschriebenen oder umschriebenen Kreise, so folgt:

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Durchmesser.

Heißen also P und p die Umfänge zweier Kreise, deren Halbmesser R und r, und deren Durchmesser D und d sind, so ist

$$P : p = R : r = D : d.$$

Daraus erhält man $P : D = p : d$, d. h. das Verhältniß der Periferie zum Durchmesser ist in allen Kreisen eine und dieselbe Größe. Die Mathematiker bezeichnen diese Größe durch π, so daß $\frac{p}{d} = \pi$ ist. Daraus folgt

$$p = d\pi \quad \text{oder} \quad p = 2r\pi,$$

d. h. die Periferie eines Kreises ist gleich dem Durchmesser oder dem doppelten Halbmesser multiplizirt mit π.

Umgekehrt folgt $d = \frac{p}{\pi}$ und $r = \frac{p}{2\pi}$,

d. h. der Durchmesser ist gleich der Periferie dividirt durch π, und der Halbmesser ist gleich der Periferie dividirt durch 2π.

Es kommt nun bloß noch darauf an, den numerischen Werth der Größe π, welche auch die Ludolfische Zahl genannt wird, auszumitteln.

Nimmt man als Halbmesser des Kreises die Einheit an, so ist $r = 1$, $d = 2$, und $\pi = \frac{p}{2}$. Die Größe π kann also als der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, betrachtet werden. Um nun den Umfang eines solchen Kreises zu berechnen, bestimmt man die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Polygons von glei-

cher Seitenanzahl, und zwar in Dezimalen; diejenigen Dezimalstellen, in denen die Umfänge der beiden Polygone übereinstimmen, bezeichnen mit völliger Sicherheit auch die Länge der Periferie des Kreises. Da nun der Unterschied jener beiden Umfänge mit der Zunahme der Seitenanzahl immer kleiner wird, und deßhalb die beiden Umfänge immer mehr Dezimalen gemeinschaftlich haben, so kann auf diese Art die Länge der Periferie so genau als man will bestimmt werden. Nach den Formeln

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}} \quad \text{und} \quad S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}},$$

welche für $r = 1$ in die folgenden

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad \text{und} \quad S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$$

übergehen, erhält man wegen $s_6 = r = 1$, nachfolgende Werthe:

s_6	$= 1{\cdot}000000000\ldots;$	S_6	$= 1{\cdot}154700538\ldots$
s_{12}	$= 0{\cdot}517638180\ldots;$	S_{12}	$= 0{\cdot}535898478\ldots$
s_{24}	$= 0{\cdot}261052384\ldots;$	S_{24}	$= 0{\cdot}263304993\ldots$
s_{48}	$= 0{\cdot}130806258\ldots;$	S_{48}	$= 0{\cdot}131086925\ldots$
s_{96}	$= 0{\cdot}065438173\ldots;$	S_{96}	$= 0{\cdot}065473230\ldots$
s_{192}	$= 0{\cdot}032723463\ldots;$	S_{192}	$= 0{\cdot}032727844\ldots$
s_{384}	$= 0{\cdot}016362279\ldots;$	S_{384}	$= 0{\cdot}016362827\ldots$
s_{768}	$= 0{\cdot}008181208\ldots;$	S_{768}	$= 0{\cdot}008181276\ldots$
s_{1536}	$= 0{\cdot}004090613\ldots;$	S_{1536}	$= 0{\cdot}004090621\ldots$
s_{3072}	$= 0{\cdot}002045307\ldots;$	S_{3072}	$= 0{\cdot}002045308\ldots$

Für die Umfänge u_n und U_n erhält man die Werthe:

u_6	$= 6{\cdot}000000\ldots;$	U_6	$= 6{\cdot}928203\ldots$
u_{12}	$= 6{\cdot}211658\ldots;$	U_{12}	$= 6{\cdot}430782\ldots$
u_{24}	$= 6{\cdot}265257\ldots;$	U_{24}	$= 6{\cdot}319320\ldots$
u_{48}	$= 6{\cdot}278700\ldots;$	U_{48}	$= 6{\cdot}292172\ldots$
u_{96}	$= 6{\cdot}282065\ldots;$	U_{96}	$= 6{\cdot}285430\ldots$
u_{192}	$= 6{\cdot}282905\ldots;$	U_{192}	$= 6{\cdot}283746\ldots$
u_{384}	$= 6{\cdot}283115\ldots;$	U_{384}	$= 6{\cdot}283325\ldots$
u_{768}	$= 6{\cdot}283168\ldots;$	U_{768}	$= 6{\cdot}283220\ldots$
u_{1536}	$= 6{\cdot}283181\ldots;$	U_{1536}	$= 6{\cdot}283194\ldots$
u_{3072}	$= 6{\cdot}283183\ldots;$	U_{3072}	$= 6{\cdot}283187\ldots$

Die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vieleckes von 3072 Seiten unterscheiden sich erst in der sechsten Dezimale; da nun die Periferie des Kreises zwischen jenen beiden Umfängen liegt, so muß nothwendig der gemeinschaftliche Theil obiger Zahlen die Periferie selbst ausdrücken, somit ist $p = 6{\cdot}28318\ldots$, und daher

$$\pi = \frac{p}{2} = 3{\cdot}14159\ldots$$

Nach dem eben angegebenen Verfahren kann die Zahl π mit jeder beliebigen Genauigkeit entwickelt werden.

Der bekannte Kopfrechner Zacharias Dase aus Hamburg berechnete die Zahl π unter Anleitung des Professors Schulz v. Straßnitzky in Wien auf 200 Dezimalen. Sie sind

π = 3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502
84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

Die Anzahl der Dezimalen, die man für π beibehält, hängt von dem Grade der Genauigkeit ab, welche man verlangt. Die sechs ersten Dezimalen, welche für die meisten praktischen Fälle ausreichen, findet man, wenn man die ersten drei ungeraden Zahlen jede zweimal neben einander hinschreibt, und die zweite Hälfte 355 durch die erste 113 dividirt; es ist

$$355 : 113 = 3{\cdot}1415929 \ldots$$

Beispiele.

1) Wie groß ist der Umfang eines Kreises; dessen Durchmesser 8″ ist?
$$p = 8 \times 3{\cdot}14159 = 25{\cdot}13272''.$$

2) Es sei $r = 3' 4''$; wie groß ist p?
$$p = 2r\pi = 80 \times 3{\cdot}14159 = 251{\cdot}3272'' = 3^0 2' 11{\cdot}3272''.$$

3) Es sei $p = 30'$; wie groß ist d?
$$d = 30 : 3{\cdot}14159 = 9{\cdot}54931'.$$

4) Wie groß ist r, wenn $p = 4^0 3' 5''$ ist?
$$p = 4^0 3' 5'' = 329'' \qquad 2\pi = 6{\cdot}28318,$$
$$r = p : 2\pi = 329 : 6{\cdot}28318 = 52{\cdot}36202'' = 4' 4{\cdot}36202''.$$

Um die Länge l eines in Graden α ausgedrückten Bogens zu erhalten, hat man, wenn r den Halbmesser bezeichnet, die Proporzion

$$l : 2r\pi = \alpha : 360,$$

woraus $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ folgt.

Ist z. B. $\alpha = 35^0$, $r = 4'$, so hat man

$$l = \frac{4 \times 3{\cdot}14159 \times 35}{180} = 2{\cdot}44345'.$$

b) Flächeninhalt des Kreises.

§. 116.

Da die Fläche eines jeden regulären Polygons gleich ist dem Umfange multiplizirt mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite, so folgt:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der Periferie multiplizirt mit dem halben Halbmesser.

Heißt f der Flächenraum eines Kreises, dessen Radius r, dessen Durchmesser d, und die Periferie p ist, so hat man also

$$f = p \cdot \frac{r}{2} = p \cdot \frac{d}{4}.$$

Setzt man $p = 2r\pi$, so ist

$$f = 2r\pi \cdot \frac{r}{2} = r^2\pi,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Ludolfischen Zahl multiplizirt.

Aus $f = r^2\pi$ folgt $r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$, nach welcher Formel sich aus dem Flächeninhalte des Kreises der Halbmesser berechnen läßt.

Da $r = \frac{p}{2\pi}$, so folgt aus $f = r^2\pi$ auch $f = \frac{p^2}{4\pi^2} \cdot \pi = \frac{p^2}{4\pi}$, und daraus $p = 2\sqrt{f\pi}$.

Beispiele.

1) Es sei $r = 5'$; wie groß ist f?
$f = r^2\pi = 25 \times 3{\cdot}14159 = 78{\cdot}53975 \square'$.

2) Es sei $d = 18''$; man berechne p und f.
$p = 18 \times 3{\cdot}14159 = 56{\cdot}54862''$
$f = 56{\cdot}54862 \times 4\frac{1}{2} = 254{\cdot}46879 \square''$.

3) Es sei $p = 20'$; wie groß ist f?
$f = p^2 : 4\pi = 400 : 12{\cdot}56636 = 31{\cdot}83101 \square'$.

4) Wie groß ist r, wenn $f = 10 \square'$ ist?
$f : \pi = 10 : 3{\cdot}14159 = 3{\cdot}1831$
$r = \sqrt{3{\cdot}1831} = 1{\cdot}784'$.

5) Man berechne p, wenn $f = 1 \square^0\ 15 \square'\ 37 \square''$ ist.
$f = 1 \square^0\ 15 \square'\ 37 \square'' = 7381 \square''$
$f\pi = 7381 \times 3{\cdot}141593 = 23188{\cdot}097933$
$\sqrt{f\pi} = \sqrt{23188{\cdot}097933} = 152{\cdot}276$
$p = 2\sqrt{f\pi} = 304{\cdot}552'' = 4^0\ 1'\ 4''$.

Heißen F und f die Flächenräume zweier Kreise, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$F = R^2\pi \quad \text{und} \quad f = r^2\pi,$$

daher $F : f = R^2 : r^2$,

d. h. die Flächen zweier Kreise verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Um den Flächeninhalt s eines Kreisausschnittes, der dem Mittelpunktswinkel α entspricht, zu berechnen, hat man die Proporzion $s : r^2\pi = \alpha : 360$, woraus

$$s = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r\pi\alpha}{180} \cdot \frac{r}{2}$$

folgt, oder wenn man statt $\frac{r\pi\alpha}{180}$ die Länge l des zugehörigen Kreisbogens setzt,

$$s = l \cdot \frac{r}{2},$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen multiplizirt mit dem halben Radius.

6. Aufgaben.

§. 117.

Bei denjenigen Aufgaben, welchen hier keine Auflösung beigegeben ist, ist dieselbe bereits in den vorhergehenden Lehrsätzen enthalten.

1. Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.
2. Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.
3. Durch einen Punkt der Peripherie an den Kreis eine Tangente zu ziehen.
4. Durch einen Punkt A (Fig. 171) außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Fig. 171.



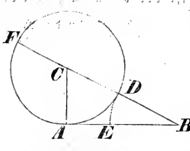
Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Zentrum durch eine Gerade AO, beschreibe über dieser als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in den Punkten B und C schneidet, und ziehe die Geraden AB und AC, so sind diese Tangenten des gegebenen Kreises.

Zieht man nämlich OB und OC, so sind die Winkel ABO und ACO als Winkel im Halbkreise rechte, die Geraden AB und AC stehen also auf die Halbmesser OB und OC senkrecht, folglich sind sie Berührungslinien des Kreises.

§. 118.

5. Eine Gerade AB (Fig. 172) im äußern und mittlern Verhältnisse zu theilen, d. h. so, daß sich die ganze Gerade zum größern Abschnitte verhält, wie dieser größere Abschnitt zum kleinern Abschnitte.

Fig. 172.



Man errichte in A eine Senkrechte auf AB, schneide davon $AC = \frac{1}{2} AB$ ab, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, und ziehe durch B und C eine Gerade, welche den Kreis in zwei Punkten D und F schneidet; macht man nun $BE = BD$, so ist die Gerade AB im Punkte E nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilt.

Es ist nämlich AB eine Tangente und BF eine Sekante des Kreises, daher findet die Proporzion $BF : AB = AB : BD$ Statt, daher auch $AB : BF - AB = BD : AB - BD$. Es ist aber

$$BF - AB = BF - DF = BD = BE,$$
$$AB - BD = AB - BE = AE,$$

mithin, wenn man in der letzten Proporzion diese Werthe substituirt,

$$AB : BE = BE : AE.$$

Die Gerade AB ist also in dem Punkte E im äußern und mittlern Verhältnisse getheilt.

6. Einen Kreisbogen AB (Fig. 173) zu halbiren.

Fig. 173.

Man beschreibe aus den Endpunkten A und B mit demselben Halbmesser Bögen, welche sich in C schneiden, und ziehe die CO, welche den gegebenen Kreisbogen in D schneidet, so ist dieser Bogen im Punkte D halbirt.

Nach der Konstrukzion erscheint nämlich der Winkel AOB halbirt, also AOD = BOD; daher muß auch der Bogen AD = BD sein

Durchs Halbiren eines jeden der zwei gleichen Bögen AD und BD wird der Bogen AB in vier gleiche Theile getheilt, und durch fortgesetztes Halbiren kann er eben so in 8, 16, 32, 64, . . 2^n gleiche Theile getheilt werden.

§. 119.

7. Die Periferie eines Kreises in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe einen Durchmesser, so ist dadurch die Periferie halbirt. Durch fortgesetztes Halbiren kann der Kreisumfang in 4, 8, 16, 32, 64, . . 2^n gleiche Theile getheilt werden.

8. Die Periferie eines Kreises in sechs gleiche Theile zu theilen.

Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise herum.

Nimmt man zwei solche Bögen für einen einzigen, so ist der Kreis in drei gleiche Theile getheilt. Durch wiederholtes Halbiren der Bögen kann der Umfang nach und nach in 12, 24, 48, 96, allgemein $3 \cdot 2^n$ gleiche Theile getheilt werden.

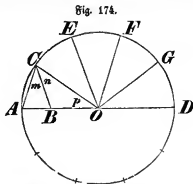
9. Den Umfang eines Kreises in zehn gleiche Theile zu theilen.

Man theile den Halbmesser AO (Fig. 174) im Punkte B im äußern und mittlern Verhältnisse, und trage den größern Abschnitt BO als Sehne im Kreise herum.

Um die Richtigkeit dieser Auflösung nachzuweisen, braucht nur gezeigt zu werden, daß wenn man AC = BO macht, der Bogen AC wirklich der 10te Theil der Periferie ist. Nach der Voraussetzung ist AO : BO = BO : AB, daher auch AO : AC = AC : AB, folglich sind die Dreiecke AOC und ACB ähnlich, weil sie den Winkel A gemeinschaftlich, und die ihn einschließenden Seiten proporzionirt haben;

es ist daher der Winkel $m = p$. Da das $\triangle$ AOC gleichschenklig, so muß auch das $\triangle$ ACB gleichschenklig, also $BC = AC$, folglich auch $BC = BO$,

Fig. 174.



und daher Winkel $n = p$ sein. Es ist somit $m + n = 2p$, und wegen $A = m + n$, $A + m + n = 4p$. Da ferner $COD = A + m + n$, so muß auch $COD = 4p$ sein. Theilt man daher den Winkel COD in vier gleiche Theile, so muß $COE = EOF = FOG = GOD = p = AOC$ sein, daher sind auch die Bögen AC, CE, EF, FG, GD einander gleich. Der Bogen AC ist somit der 5te Theil der halben, und folglich der 10te Theil der ganzen Periferie.

Betrachtet man zwei solche Bögen zusammen für einen, so ist die Kreislinie in 5 gleiche Theile getheilt. Durch allmäliges Halbiren kann man dann den Umfang auch in 20, 40, 80, . . . 5.2^n gleiche Theile theilen.

7. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung im Beweisen und Auflösen.

A. Lehrsätze.

§. 120.

1. Von einem Punkte, der nicht Mittelpunkt eines Kreises ist, lassen sich zum Umfange desselben stets nur je zwei einander gleiche Gerade ziehen.
2. Wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises mehrere Gerade an die Periferie zieht, so ist diejenige die kürzeste, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht; jede andere ist um so länger, einen je größern Winkel sie mit der kürzesten Geraden bildet.
3. Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Zentrum entfernt.
4. Sehnen, die gleichweit vom Zentrum abstehen, sind einander gleich.
5. Von zwei ungleichen Sehnen liegt die größere näher am Mittelpunkte.
6. Wenn sich zwei Sehnen eines Kreises senkrecht durchschneiden, so ist von den vier Bögen, in die sie die Periferie theilen, die Summe zweier gegenüberliegenden gleich der Summe der beiden andern.

7. Eine Gerade, welche auf der Tangente eines Kreises im Berührungspunkte senkrecht stehet, gehet durch den Mittelpunkt des Kreises.
8. Ein Winkel, dessen Scheitel innerhalb des Kreises liegt, ist gleich der Summe zweier Periferiewinkel, die auf den Bögen stehen, welche von den Schenkeln jenes gegebenen und seines Scheitelwinkels abgeschnitten werden.
9. Ein Winkel, dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt, ist gleich der Differenz zweier Periferiewinkel, die auf den Bögen aufstehen, welche von den Schenkeln jenes Winkels abgeschnitten werden.
10. Wenn man um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis beschreibt, die zu zwei Seiten des Dreieckes gehörigen Bögen halbirt, und die Halbirungspunkte durch eine Sehne verbindet, so wird diese durch die von ihr geschnittenen Dreieckseiten in drei gleiche Theile getheilt.
11. Wenn in einem Vierecke zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen gleich zwei Rechten sind, und man beschreibt durch drei Eckpunkte desselben einen Kreis, so muß dieser auch durch den vierten Eckpunkt gehen.
12. Beschreibt man um jedes der vier Dreiecke, in welche ein Viereck durch seine beiden Diagonalen getheilt wird, einen Kreis, so bilden die Mittelpunkte derselben die Eckpunkte eines Parallelogramms.

B. Aufgaben.

§. 121.

1. Aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben,
   a) der eine gegebene Gerade berührt,
   b) der einen gegebenen Kreis berührt.
2. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben,
   a) der durch zwei gegebene Punkte gehet,
   b) der durch einen gegebenen Punkt geht und eine Gerade berührt,
   c) der durch einen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt,
   d) der zwei gegebene Gerade berührt,
   e) der eine Gerade und einen Kreis berührt,
   f) der zwei gegebene Kreise berührt.
3. Einen Kreis zu konstruiren,
   a) der durch zwei Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt,
   b) der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Gerade berührt,
   c) der einen Kreis in einem bestimmten Punkte und eine Gerade berührt,
   d) der eine Gerade in einem bestimmten Punkte und einen Kreis berührt,
   e) der zwei Kreise und zwar den einen in einem bestimmten Punkte berührt.
4. Einen Kreis zu beschreiben,
   a) der zwei Gerade und einen Kreis berührt,

b) der eine Gerade und einen Kreis berührt, und durch einen gegebenen Punkt durchgehet,
c) der eine Gerade und zwei Kreise berührt,
d) der durch zwei Punkte gehet und einen Kreis berührt,
e) der durch einen Punkt gehet und zwei Kreise berührt,
f) der drei Kreise berührt.

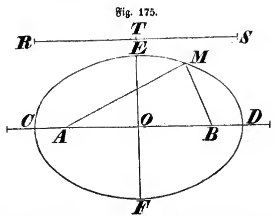
5. In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu suchen, von welchem man an zwei Kreise gleiche Tangenten ziehen kann.
6. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.
7. Von einem Kreise einen Kreisabschnitt abzuschneiden, so daß der in demselben liegende Periferiewinkel gleich sei einem gegebenen Winkel.
8. Ueber einer gegebenen Geraden einen Kreisabschnitt zu beschreiben, dessen Periferiewinkel gleich ist einem gegebenen Winkel.
9. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.
10. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das einem andern Dreiecke ähnlich ist.

II. Die Ellipse.

§. 122.

Die Ellipse ist jene krumme Linie, in welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Geraden gleich ist.

Fig. 175.



Sind A und B (Fig. 175) die zwei gegebenen Punkte, und RS die gegebene Gerade, so liegt der Punkt M in der Ellipse, wenn AM + BM = RS ist. Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte; die Mitte O ihres Abstandes AB wird das Zentrum, und die Entfernung OA = OB die Exzentrizität der Ellipse genannt. Die Geraden AM und BM nennt man die Leitstrahlen oder Vektoren des Punktes M.

Halbirt man die gegebene Gerade RS im Punkte T, und trägt die Hälfte RT auf der Verlängerung der AB von O bis C und D auf, so sind C und D Punkte der Ellipse; denn es ist

$$AC + BC = AC + AD = CD = RS$$
$$\text{und } AD + BD = AD + AC = CD = RS.$$

Die Gerade CD nennt man die große Axe der Ellipse, und ihre Endpunkte C und D die Scheitel.

Es ist also in der Ellipse die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der großen Axe gleich.

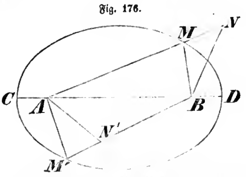
Beschreibt man aus beiden Brennpunkten A und B mit der halben großen Axe CO nach oben und unten Bögen, so liegen die Durchschnittspunkte E und F auch in der Ellipse, weil bei jedem die Summe der beiden Leitstrahlen der großen Axe gleich ist. Zieht man durch E und F eine Gerade, so muß dieselbe, weil über AB nach oben und unten ein gleichschenkliges Dreieck gedacht werden kann, durch den Punkt O gehen und auf AB senkrecht sein.

Die Gerade EF heißt die kleine Axe der Ellipse.

§. 123.

Die Summe der Entfernungen eines außerhalb der Ellipse liegenden Punktes von den beiden Brennpunkten ist stets größer als die große Axe. Die Summe der Entfernungen eines innerhalb der Ellipse liegenden Punktes von den beiden Brennpunkten ist kleiner als die große Axe.

Fig. 176.



Es sei N (Fig. 176) ein Punkt außerhalb der Ellipse; verbindet man ihn mit den Brennpunkten A und B durch die Geraden AN und BN, deren erstere die Ellipse in M schneidet, und zieht die BM, so ist $MN + BN > BM$, folglich auch $AM + MN + BN > AM + BM$ oder $AN + BN > AM + BM$; allein da M ein Punkt der Ellipse ist, so ist $AM + BM = CD$ daher muß $AN + BN > CD$ sein.

Für den Punkt N', welcher innerhalb der Ellipse liegt, ziehe man eben so AN' und BN', verlängere die letztere, bis sie die Ellipse im Punkte M' schneidet, und ziehe die Gerade AM'. Man hat nun $AN' < AM' + M'N'$,

daher auch $AN' + BN' < AM' + M'N' + BN'$ oder $AN' + BN' < AM + BM'$; nun ist $AM' + BM' = CD$, folglich $AN' + BN' < CD$.

Aus den vorhergehenden Sätzen läßt sich indirekt folgern:

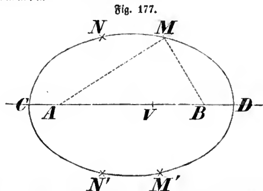
Ist die Summe der Entfernungen eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Ellipse größer als die große Axe derselben, so muß dieser Punkt außerhalb der Ellipse liegen. Ist dagegen die Summe der Entfernungen eines Punktes von den Brennpunkten einer Ellipse kleiner als die große Axe derselben, so muß dieser Punkt innerhalb der Ellipse liegen.

Aufgaben.

§. 124.

1. **Wenn die große Axe und die beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Ellipse zu bestimmen.**

Fig. 177.



Es sei CD (Fig. 177) die große Axe der Ellipse, A und B seien ihre Brennpunkte. Man nehme zwischen den Brennpunkten irgend einen Punkt V an, so wird dadurch die große Axe in zwei Abschnitte getheilt; beschreibt man zuerst mit dem größern CV aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bögen, und dann eben so mit dem kleinern Abschnitte DV, so sind die vier Durchschnittspunkte M, N, M', N' Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine Leitstrahl dem größern Abschnitte CV der großen Axe, und der andere Leitstrahl dem kleinern Abschnitte DV, also ihre Summe der ganzen großen Axe gleich ist. Auf diese Art können, wenn man in der Linie AB verschiedene Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Liegen diese sehr nahe an einander, so kann man sie durch eine stetige Linie verbinden, und erhält dadurch die Ellipse.

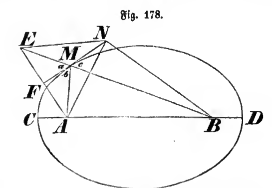
2. **Eine Ellipse mit Hilfe eines Fadens in einem Zuge zu beschreiben.**

Man setze in die Brennpunkte A und B zwei Nadeln, und lege

um dieselben einen Faden, dessen Länge gleich ist AB + CD, und dessen Enden zusammengebunden sind. Nimmt man nun einen Zeichenstift, legt ihn in das Innere des Fadens, und fährt damit um die beiden Punkte so herum, daß der Faden immer straff gespannt bleibt, so beschreibt dieser Stift eine Ellipse. Denn es ist bei dieser Bewegung in jeder Lage des Stiftes M die Summe der Fadenstücke AM und BM, welche die Vektoren vorstellen, der Länge der großen Axe CD gleich.

3. Eine gerade Linie zu ziehen, welche die Ellipse in einem gegebenen Punkte M (Fig. 178) berührt.

Fig. 178.



Man ziehe an den Punkt M die Leitstrahlen AM und BM, und verlängere BM bis E, so daß ME = AM ist. Sodann ziehe man die Gerade AE und halbire sie in F; die durch F und M gezogene Gerade FM ist nun die verlangte Tangente.

Nimmt man in der Geraden FM außer M irgend einen Punkt N, und zieht die Linien AN, BN und EN; so ist wegen ME = MA das Dreieck AME gleichschenklig, daher die aus dem Scheitel M zur Mitte der Grundlinie gezogene Gerade MF senkrecht auf AE. Weil nun FN = FN, AF = EF, und AFN = EFN = R, so ist $\triangle$ AFN $\cong$ EFN, daher AN = EN. Addirt man beiderseits BN dazu, so ist AN + BN = EN + BN; aber EN + BN > BE, daher auch AN + BN > BE, oder weil BE = BM + ME = BM + AM = CD ist, auch AN + BN > CD; der Punkt N liegt daher außerhalb der Ellipse; und da dieses von jedem Punkte der Geraden FM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden kann, so folgt, daß FM die Ellipse im Punkte M berührt.

Aus der Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich der Satz:

Jede Tangente der Ellipse macht in dem Berührungspunkte mit den beiden Leitstrahlen gleiche Winkel.

Es ist nämlich in dem gleichschenkligen $\triangle$ AME der Winkel a = b, aber a = c, daher auch b = c.

III. Die Hyperbel.

§. 125.

Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Geraden gleich ist.

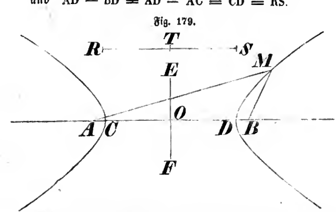
Sind A und B (Fig. 179) die gegebenen Punkte, und RS die gegebene Gerade, so liegt der Punkt M in der Hyperbel, wenn $AM - BM = RS$ ist.

Die Punkte A und B heißen die Brennpunkte, die Mitte O ihres Abstandes AB das Zentrum, und die Entfernung $OA = OB$ die Exzentrizität der Hyperbel; die Geraden AM und BM sind die Leitstrahlen des Punktes M.

Wird die gegebene Gerade RS in T halbirt, und die Hälfte RT von O aus bis C und D aufgetragen, so sind C und D zwei Punkte der Hyperbel; denn man hat

$$BC - AC = BC - BD = CD = RS$$
und $$AD - BD = AD - AC = CD = RS.$$

Fig. 179.



Die Gerade CD nennt man die Hauptaxe oder erste Axe, und ihre Endpunkte C und D die Scheitel der Hyperbel.

In der Hyperbel ist also die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der ersten Axe gleich.

Beschreibt man aus den beiden Scheiteln C und D mit der Exzentrizität AO als Halbmesser nach oben und unten Bögen, welche sich in den Punkten E und F durchschneiden, und zieht die Gerade EF, so muß diese durch das Zentrum O gehen und auf der ersten Axe CD senkrecht stehen.

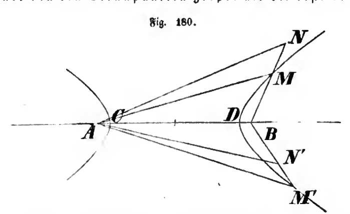
Die Gerade EF wird die konjugirte oder zweite Axe der Hyperbel genannt.

§. 126.

Liegt ein Punkt außerhalb der Hyperbel, so ist die Differenz seiner Abstände von den beiden Brennpunk-

ten kleiner als die erste Axe. Liegt dagegen ein Punkt innerhalb der Hyperbel, so ist der Unterschied seiner Abstände von den Brennpunkten größer als die erste Axe.

Fig. 180.



Es liege der Punkt N (Fig. 180) außerhalb der Hyperbel; zieht man zu den Brennpunkten A und B die Geraden AN und BN, deren letztere die Hyperbel in M schneidet, so ist, wenn man noch die AM zieht, $AN - MN < AM$, und wenn man beiderseits noch BM abzieht, $AN - MN - BM < AM - BM$, oder $AN - BN < AM - BM$; da nun M ein Punkt der Hyperbel ist, so muß $AM - BM = CD$, daher $AN - BN < CD$ sein.

Es sei ferner N' ein Punkt innerhalb der Hyperbel, und man ziehe wieder die Geraden AN' und BN', welche letztere die Hyperbel in M' schneidet, so ist, wenn man noch AM' zieht, $AN' > AM' - M'N'$, und wenn man beiderseits BN' abzieht, $AN' - BN' > AM' - M'N' - BN'$, oder $AN' - BN' > AM' - BM'$; nun ist $AM' - BM' = CD$, daher muß $AN' - BN' > CD$ sein.

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt:

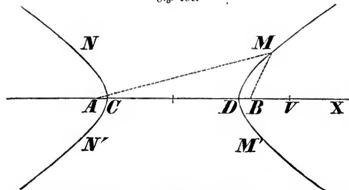
Wenn die Differenz der Entfernungen eines Punktes von den Brennpunkten einer Hyperbel kleiner ist als die erste Axe derselben, so liegt dieser Punkt außerhalb der Hyperbel. Ist dagegen die Differenz der Abstände eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Hyperbel größer als die erste Axe derselben, so muß dieser Punkt innerhalb der Hyperbel liegen.

Aufgaben.

§. 127.

1. Wenn die erste Axe und die beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Hyperbel zu bestimmen.

Fig. 181.



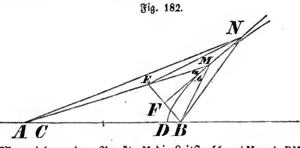
Es sei CD (Fig. 181) die erste Axe der Hyperbel, A und B seien die Brennpunkte. Man nehme in der Geraden BX irgend einen Punkt V, und beschreibe mit dem Halbmesser CV aus den beiden Brennpunkten nach oben und unten Bögen, hierauf eben so mit dem Halbmesser DV; so werden die Durchschnittspunkte M, N, M', N' dieser Bögen in der Hyperbel liegen, denn es ist z. B. für den Punkt M

$$AM - BM = CV - DV = CD.$$

Nimmt man in der Geraden BX verschiedene andere Punkte und verfährt auf die eben angegebene Weise, so kann man dadurch beliebig viele Punkte erhalten, welche alle in der Hyperbel liegen.

2. **Durch einen Punkt M (Fig. 182) an die Hyperbel eine Tangente zu führen.**

Fig. 182.



Man ziehe zu dem Punkte M die Leitstrahlen AM und BM, schneide ME = BM ab, verbinde E und B durch eine Gerade EB und halbire diese in F; die durch F und M gezogene Gerade FM ist die verlangte Tangente.

Nimmt man in der Linie FM außer M irgend einen Punkt N an, und zieht die Geraden AN, BN und CN, so ist EN=BN; denn im gleichschenkligen Dreiecke BME ist die Gerade FM senkrecht auf BE; in den Dreiecken EFN und BFN sind daher zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich, somit $\triangle$ EFN$\cong$BFN und EN=BN. Es ist nun AN$<$AE $+$EN, folglich AN$-$EN$<$AE; oder AN$-$BN$<$AM$-$EM, oder AN$-$BN

$< AM - BM$, daher $AN - BN < CD$; der Punkt N liegt daher außerhalb der Hyperbel. Weil nun dasselbe auch von jedem andern Punkte der EM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden kann, so ist FM eine Tangente der Hyperbel.

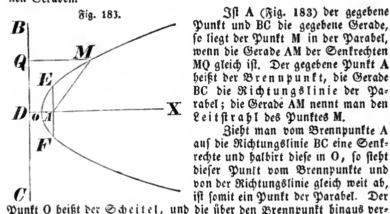
Weil das Dreieck BME gleichschenklig ist, so ist der Winkel $a = b$, d. h. in der Hyperbel macht die Tangente mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

IV. Die Parabel.

§. 128.

Die Parabel ist jene krumme Linie, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte eben so weit entfernt ist, als von einer gegebenen Geraden.

Fig. 183.



Ist A (Fig. 183) der gegebene Punkt und BC die gegebene Gerade, so liegt der Punkt M in der Parabel, wenn die Gerade AM der Senkrechten MQ gleich ist. Der gegebene Punkt A heißt der Brennpunkt, die Gerade BC die Richtungslinie der Parabel; die Gerade AM nennt man den Leitstrahl des Punktes M.

Zieht man vom Brennpunkte A auf die Richtungslinie BC eine Senkrechte und halbirt diese in O, so steht dieser Punkt vom Brennpunkte und von der Richtungslinie gleich weit ab, ist somit ein Punkt der Parabel. Der Punkt O heißt der Scheitel, und die über den Brennpunkt hinaus verlängerte Gerade OX die Axe der Parabel.

Die Gerade EF, welche im Brennpunkte auf die Axe senkrecht steht, wird der Parameter der Parabel genannt.

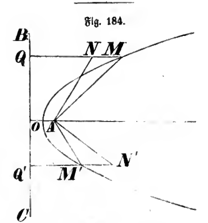
§. 129.

Jeder Punkt außerhalb der Parabel steht vom Brennpunkte weiter ab als von der Richtungslinie. Jeder Punkt innerhalb der Parabel steht näher am Brennpunkte als an der Richtungslinie.

Ist N (Fig. 184) ein Punkt außerhalb der Parabel, so ziehe man von N auf BC die Senkrechte NQ, welche verlängert die Parabel im Punkte M schneidet. Zieht man nun AN und AM, so ist $AN + MN > AM$, und wegen $AM = MQ$ auch $AN + MN > MQ$, folglich $AN > MQ - MN$, oder $AN > NQ$.

Liegt der Punkt N' innerhalb der Parabel, so fälle man wieder auf BC die Senkrechte N'Q', welche die Parabel in M' schneidet, und man hat, wenn die Geraden AN' und AM' gezogen werden, $AN' < AM' + M'N'$, und wegen $AM' = M'Q'$ auch $AN' < M'Q' + M'N'$, oder $AN' < N'Q'$.

Fig. 184.



Aus den vorhergehenden Sätzen folgt:

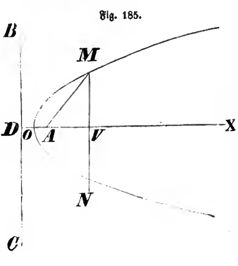
Liegt ein Punkt näher an der Richtungslinie als am Brennpunkte einer Parabel, so muß er außerhalb der Parabel liegen; ist dagegen ein Punkt näher am Brennpunkte als an der Richtungslinie, so liegt er innerhalb der Parabel.

Aufgaben.

§. 130.

1. Wenn der Brennpunkt und die Richtungslinie gegeben sind, beliebig viele Punkte der Parabel zu bestimmen.

Fig. 185.

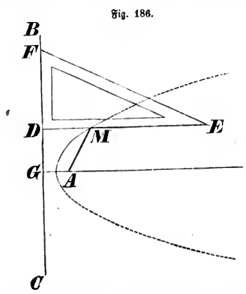


Es sei A (Fig. 185) der Brennpunkt und BC die Richtungslinie. Man ziehe von A auf BC eine Senkrechte AD und verlängere sie über A hinaus. Der Mittelpunkt O der AD ist der Scheitel der Parabel. Nimmt man nun in der Axe OX irgend einen Punkt V, zieht dadurch die auf die Axe senkrechte Gerade MN, und beschreibt aus dem Brennpunkte A mit dem Halbmesser DV zwei Bögen, welche jene Senkrechte in den Punkten M und N durchschneiden, so müssen diese Punkte in der Parabel liegen, weil sie

nach der Konstrukzion vom Brennpunkte eben so weit abstehen, als von der Richtungslinie. Wenn man auf dieselbe Art sehr viele Senkrechte auf der Axe errichtet und sie gehörig durchschneidet, so erhält man beliebig viele Punkte der Parabel. Wenn diese sehr nahe an einander liegen, so gibt ihre Verbindung mit einer stetigen Linie die Parabel.

2. Die Parabel in einem Zuge zu beschreiben.

Fig. 186.

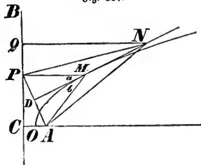


Man nehme ein hölzernes rechtwinkliges Dreieck EDF (Fig. 186) und einen Faden von der Länge DE, befestige das eine Ende des Fadens im Brennpunkte A und das andere in E. Dann läßt man das Dreieck mit der Kathete DF längs der Richtungslinie fortgleiten, und führt zugleich den Zeichenstift M längs der Kathete DE so fort, daß dabei der Faden immer straff gespannt bleibt; der Stift M beschreibt dadurch den obern Ast der Parabel. Denn es wird bei jeder Lage des Dreieckes die Fadenlänge AM dem abgewickelten Stücke DM der Kathete DE gleich sein, d. h. es wird in jeder Lage der Punkt M vom Brennpunkte eben so weit abstehen als von der Richtungslinie. Um eben so den untern Ast der Parabel zu erhalten, wird man das Dreieck so umdrehen, daß die Kathete DF in die Richtung GC fällt.

3. Durch einen Punkt M (Fig. 187) der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Man fälle von M auf die Richtungslinie BC die Senkrechte MP, ziehe die Gerade AP und halbire sie in D; die durch D und M gezogene Gerade DM ist die verlangte Tangente.

Fig. 187.



Man nehme in der Geraden DM außer M irgend einen Punkt N an und ziehe AN, PN und NQ ⊥ BC. Weil das Dreieck AMP gleichschenklig ist, so ist MD ⊥ AP. Die Dreiecke ADN und PDN sind nun kongruent, da sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben; daher ist AN = PN. Es ist nun PN > NQ, daher muß auch AN > NQ sein; der Punkt N liegt also außerhalb der Parabel. Dasselbe kann von jedem Punkte der DM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden; also ist DM eine Tangente der Parabel.

Da der Winkel a = b ist, so folgt:

Die Tangente einer Parabel halbirt den Winkel, den der Leitstrahl des Berührungspunktes mit einer durch diesen Punkt parallel mit der Axe gezogenen Geraden bildet.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. 131.

Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben: entweder sind sie parallel, wenn sie nämlich in derselben Richtung fortlaufen, so daß sie überall dieselbe Entfernung von einander haben, oder sie treffen hinlänglich verlängert in einem Punkte zusammen; oder es ist keines von beiden der Fall, die Geraden gehen an einander vorbei, ohne parallel zu sein und ohne sich zu schneiden. In den ersten zwei Fällen müssen die beiden Geraden in der nämlichen Ebene liegen, im dritten Falle befinden sie sich in zwei verschiedenen Ebenen.

§. 132.

Eine gerade Linie im Raume kann gegen eine Ebene eine zweifache Lage haben, entweder ist sie mit ihr parallel, wenn sie überall die nämliche Entfernung von der Ebene hat, oder sie ist gegen dieselbe geneigt, wenn sie sich nach einer Seite hin der Ebene nähert, und nach der andern Seite von ihr entfernt. Eine Gerade, welche mit einer Ebene parallel ist, kann, da sie von der Ebene stets gleich weit entfernt bleibt, mit der Ebene nicht zusammentreffen, wenn sie auch noch so weit verlängert wird; eine gegen die Ebene geneigte Gerade dagegen muß hinlänglich verlängert die Ebene in einem Punkte schneiden, und zwar auf derjenigen Seite, nach welcher hin sie sich der Ebene nähert. Der Punkt, in welchem eine gegen die Ebene geneigte Gerade mit derselben zusammentrifft, heißt der Fußpunkt dieser Geraden in der Ebene.

Eine gegen die Ebene geneigte Gerade kann wieder senkrecht oder schief auf derselben aufstehen. Eine Gerade heißt auf der Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht; im entgegengesetzten Falle ist sie auf der Ebene schief.

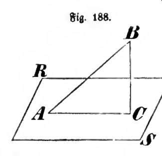


Fig. 188.

Wenn eine Gerade auf einer Ebene schief steht, und man fällt von einem Punkt derselben eine Senkrechte auf die Ebene; so heißt die gerade Linie, welche den Fußpunkt jener Geraden mit dem Fußpunkte der Senkrechten verbindet, die Projekzion jener Geraden in der Ebene; und der Winkel, den die schiefe Gerade mit ihrer Projekzion bildet, der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene.

Steht AB (Fig. 188) schief auf der Ebene RS und ist BC ⊥ Ebene RS, so ist AC die Projekzion der Geraden AB in der Ebene RS, und BAC der Neigungswinkel der AB gegen die Ebene RS.

§. 133.

Vergleicht man zwei Ebenen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage, so sind dieselben entweder einander parallel, wenn alle Punkte der einen Ebene von der andern gleich weit abstehen; oder es sind die Ebenen gegen einander geneigt, wenn sie sich auf einer Seite nähern, auf der andern entfernen. Zwei parallele Ebenen können, da sie stets denselben Abstand von einander haben, auch noch so weit erweitert, nie zusammentreffen. Zwei gegen einander geneigte Ebenen müssen hinlänglich erweitert einander durchschneiden, und zwar ist der Durchschnitt eine gerade Linie; denn wäre die Durchschnittslinie nicht gerade, so müßte sie durch drei Punkte gehen, welche nicht in derselben Geraden liegen, und es würden also durch jene drei Punkte zwei verschiedene Ebenen gelegt sein, was nicht möglich ist.

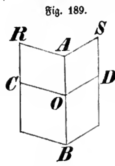


Fig. 189.

Wenn man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen auf dieselbe in jeder Ebene eine Senkrechte errichtet, so heißt der Winkel, welchen diese Senkrechten einschließen, der Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Ist (Fig 189) CO ⊥ AB und DO ⊥ AB, so ist COD der Neigungswinkel der zwei Ebenen BR und BS.

Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist; im entgegengesetzten Falle stehen sie schief auf einander.

§. 134.

Die gegenseitige Neigung von drei oder mehreren in einem Punkte zusammenstoßenden Ebenen wird ein Körperwinkel, auch Körpereck,

genannt. Der Punkt, in welchem alle Ebenen zusammentreffen, heißt die Spitze oder der Scheitel; die geraden Linien, in denen sich je zwei nach einander folgende Ebenen durchschneiden, nennt man die Kanten, und die Winkel, welche je zwei auf einander folgende Kanten bilden, die Kantenwinkel.

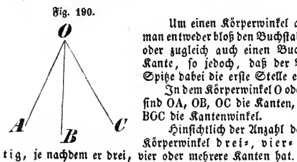


Fig. 190.

Um einen Körperwinkel anzugeben, nennt man entweder bloß den Buchstaben an der Spitze, oder zugleich auch einen Buchstaben an jeder Kante, so jedoch, daß der Buchstabe an der Spitze dabei die erste Stelle einnimmt.

In dem Körperwinkel O oder OABC (F. 190) sind OA, OB, OC die Kanten, und AOB, AOC, BOC die Kantenwinkel.

Hinsichtlich der Anzahl der Kanten ist ein Körperwinkel drei-, vier- oder mehrkantig, je nachdem er drei, vier oder mehrere Kanten hat.

I. Gerade Linien im Raume.

§. 135.

Wenn die Schenkel eines Winkels im Raume mit den Schenkeln eines andern Winkels gleiche Richtung haben, so muß auch die Abweichung der Richtungen in beiden Winkeln dieselbe sein.

Es gilt also auch in Bezug auf den Raum der Satz:

Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite hin parallel laufen, sind einander gleich.

II. Gerade Linien mit der Ebene verglichen.

Lehrsätze.

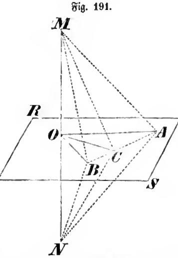
§. 136.

1. Wenn eine Gerade auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, senkrecht steht, so ist sie auch auf jeder andern durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden, und somit auf dieser Ebene selbst senkrecht.

Es stehe (Fig. 191) die Gerade MO auf der Ebene RS so auf, daß sie mit den in dieser Ebene durch O gezogenen Geraden OA und OB rechte Winkel bilden; so ist zu beweisen, daß sie auf jeder durch O willkürlich gezogenen Geraden, z. B. auf OC, welche die Verbindungslinie AB in C schneidet, senkrecht steht. — Man verlängere die Gerade MO unter die Ebene RS, mache $ON = OM$, und ziehe MA und NA, so sind die rechtwinkligen Dreiecke MOA und NOA kongruent, weil sie die beiden Katheten wechselseitig gleich haben; folglich ist auch $MA = NA$. Zieht man MB und NB, so sind aus demselben Grunde auch die rechtwinkligen Dreiecke MOB und NOB kongruent, daher $MB = NB$. Die

Dreiecke MAB und NAB haben nun alle drei Seiten wechselseitig gleich, folglich sind sie kongruent, und es müssen die den gleichen Seiten

Fig. 191.

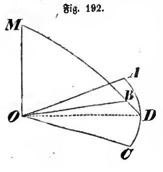


MB und NB gegenüberliegenden Winkel MAB und NAB gleich sein. Zieht man endlich noch MC und NC, so ist wegen AC = AC, MA = NA und MAC = NAC das $\triangle$ MAC $\cong$ NAC, daher MC = NC. Die Dreiecke MOC und NOC haben nun alle drei Seiten wechselweise gleich, also sind sie kongruent, und folglich die Winkel MOC und NOC gleich, und da sie Nebenwinkel sind, rechte; es steht also MO wirklich auf OC, und eben so auf jeder andern durch O in der Ebene RS gezogenen Geraden, folglich auf der Ebene RS selbst senkrecht.

2. Wenn drei gerade Linien auf einer andern Geraden in demselben Punkte senkrecht stehen, so müssen sie in einer und derselben Ebene liegen.

Es seien (Fig. 192) die Geraden OA, OB und OC senkrecht auf OM, so müssen sie in der nämlichen Ebene liegen. Man denke sich durch OA und OC die Ebene AOC gelegt, auf welcher nach dem eben bewiesenen Satze die Gerade OM senkrecht steht, so muß auch die OB in dieser Ebene liegen. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte sie über oder unter dieser Ebene zu liegen kommen. Nehmen wir erstlich an, die OB liege über der Ebene AOC, und denken wir uns durch den Winkel MOB eine Ebene gelegt, welche die Ebene AOC in der Geraden OD durchschneiden würde, so müßte der Winkel MOB < MOD sein; allein da die Durchschnittslinie OD in der Ebene AOC

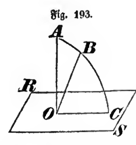
Fig. 192.



liegt, worauf OM senkrecht ist, so müßte MOD = R, somit MOB < R sein, was der Voraussetzung MOB = R widerspricht. Es kann also die Annahme, daß OB über der Ebene AOC liegt, nicht möglich sein. Eben so kann gezeigt werden, daß OB nicht unter der Ebene AQC liegen könne, folglich muß OB in der Ebene AOC selbst liegen.

§. 137.

Fig. 193.

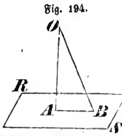


3. **In einem Punkte einer Ebene kann auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden.**

Es sei OA ⊥ RS (Fig. 193), so kann nicht noch eine zweite Gerade, z. B. OB, im Punkte O auf RS senkrecht stehen. Denkt man sich nämlich durch den Winkel AOB eine Ebene gelegt, welche die Ebene RS in einer geraden Linie OC schneidet, so ist offenbar der Winkel BOC < AOC; aber nach der Voraussetzung ist AOC = R, daher BOC < R, mithin kann OB nicht senkrecht auf RS sein.

4. **Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann auf diese nur eine einzige Senkrechte herabgelassen werden.**

Fig. 194.



Es sei OA ⊥ RS (Fig. 194), so kann aus dem Punkte O nicht noch eine zweite Gerade, z. B. OB, auf die Ebene RS senkrecht geführt werden. Denkt man sich nämlich durch den Winkel AOB eine Ebene gelegt, welche die Ebene RS in der geraden Linie AB schneidet, so ist in dem Dreiecke AOB nach der Voraussetzung der Winkel A ein rechter, daher muß B spitzig sein, und es kann daher OB auf die Ebene RS nicht senkrecht stehen.

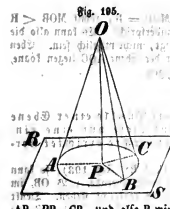
5. **Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade, welche von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf diese gezogen werden kann.**

Ist nämlich OA ⊥ RS, und OB irgend eine schiefe Gerade, so muß in dem rechtwinkligen Dreiecke AOB die Kathete OA kleiner sein als die Hypothenuse OB.

Aus diesem Grunde dient die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene, um die *Entfernung* dieses Punktes von der Ebene zu bestimmen.

§. 138.

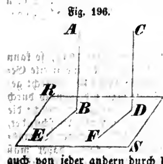
6. **Wenn man von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser drei gleich lange gerade Linien zieht, und durch die Fußpunkte derselben einen Kreis beschreibt, so fällt der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem**



Fußpunkte der Senkrechten, welche von jenem Punkte auf die Ebene herabgelassen wird, zusammen.

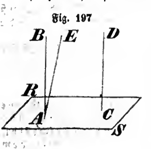
Es sei (Fig. 195) AO = BO = CO, und OP ⊥ RS, so muß P der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B und C beschriebenen Kreises sein. Zieht man AP, BP und CP, so haben die bei P rechtwinkligen Dreiecke AOP, BOP und COP eine gemeinschaftliche Kathete OP und gleiche Hypothenusen, folglich sind sie kongruent und müssen auch die andere Kathete gleich haben, mithin ist AP = BP = CP, und also P wirklich der Mittelpunkt des durch A, B und C gelegten Kreises.

7. **Wenn von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so ist auch die andere auf diese Ebene senkrecht.**



Es sei (Fig. 196) AB ∥ CD und AB ⊥ RS, so muß auch CD ⊥ RS sein. Man ziehe durch D in der Ebene RS die willkürliche Gerade DF und damit parallel die Gerade BE, so müssen die Winkel D und B gleich sein, weil sie parallele Schenkel haben; aber nach der Voraussetzung ist B ein rechter Winkel, also muß es auch D sein, und es ist CD ⊥ DF. Da nun DF in der Ebene RS durch D ganz willkürlich gezogen wurde, so gilt das von DF Bewiesene auch von jeder andern durch D in der Ebene RS gezogenen Geraden; CD steht demnach auf allen solchen geraden Linien, mithin auf der Ebene RS selbst senkrecht.

8. **Wenn zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel.**

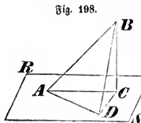


Es seien (Fig. 197) AB und CD senkrecht auf RS, so muß AB ∥ CD sein. Wäre AB nicht parallel mit CD, so müßte sich durch A eine andere mit CD parallele Linie AE ziehen lassen; alsdann müßte AE ⊥ RS sein, was nicht möglich ist, da im Punkte A auf die Ebene RS nicht zwei verschiedene Senkrechte AB und AE errichtet werden können. Die Annahme, daß AB mit CD nicht parallel sei, ist demnach nicht möglich; folglich muß AB ∥ CD sein.

§. 139.

9. **Der Neigungswinkel ist der kleinste Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bilden kann.**

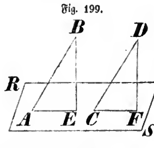
Fig. 198.



Ist BC ⊥ RS (Fig. 198), so ist BAC der Neigungswinkel der Geraden AB in der Ebene RS. Zieht man durch A mit der Ebene RS irgend eine von der Projekzion AC verschiedene Gerade AD=AC, ferner noch die CD und BD, so ist das Dreieck BCD bei C rechtwinklig, daher BC < BD. Vergleicht man nun die beiden Dreiecke BAC und BAD, so findet man, daß in denselben AB = AB, AC = AD, aber BC < BD ist; daher muß auch der Winkel BAC < BAD sein. Auf gleiche Weise kann man zeigen, daß der Winkel BAC kleiner ist als jeder andere Winkel, den die AB mit einer durch A in der Ebene RS gezogenen Geraden bildet.

10. **Wenn zwei Parallele auf einer Ebene schief aufstehen, so bilden sie mit dieser Ebene gleiche Neigungswinkel.**

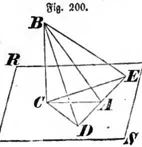
Fig. 199.



Es sei AB ‖ CD (Fig. 199). Fällt man von B und C auf die Ebene RS die Senkrechte BE und DF, und zieht AE und CF, so sind BAE und DCF die Neigungswinkel der Geraden AB und CD gegen die Ebene RS. In den Dreiecken ABE und CDF sind nun die Winkel E und F als rechte einander gleich, ferner auch die Winkel B und D gleich, weil ihre Schenkel parallel sind; es müssen daher auch die dritten Winkel A und C gleich sein; folglich bilden AB und CD mit der Ebene RS gleiche Neigungswinkel.

11. **Zieht man durch den Fußpunkt einer schiefen Geraden auf ihre Projekzion in einer Ebene eine Senkrechte, so muß diese auch auf der schiefen Geraden senkrecht stehen.**

Fig. 200.



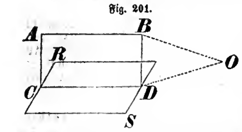
Es sei (Fig. 200) AC die Projekzion der schiefen Geraden AB in der Ebene RS, somit BC ⊥ Ebene RS; ferner sei die in der Ebene RS gezogene Gerade DE ⊥ AC; so muß auch DE ⊥ AB sein.

Man mache AD=AE und ziehe CD und CE, so sind die rechtwinkligen Dreiecke DAC und EAC kongruent, weil sie gleiche Katheten haben; daher muß auch CD = CE sein. Zieht man nun BD und BE, so haben

die rechtwinkligen Dreiecke BCD und BCE ebenfalls gleiche Katheten, es ist daher $\triangle BCD \cong BCE$, und folglich $BD = BE$. Das Dreieck BDE ist also gleichschenklig, und es muß die Gerade BA, welche darin den Scheitel B mit der Mitte A der Grundlinie DE verbindet, auf dieser senkrecht stehen; mithin ist wirklich $DE \perp AB$.

12. **Wenn eine Gerade mit einer Ebene parallel ist, und man legt dadurch eine Ebene, welche die andere Ebene schneidet, so muß die Durchschnittslinie mit jener Geraden parallel sein.**

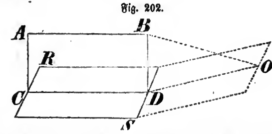
Fig. 201.



Ist $AB \parallel RS$ (Fig. 201), und man legt durch AB eine Ebene, welche die Ebene RS in der Geraden CD schneidet, so muß $CD \parallel AB$ sein. Wäre CD nicht parallel mit AB, so müßten diese beiden Geraden hinlänglich verlängert, da sie in derselben Ebene liegen, nothwendig in einem Punkte, z. B. in O zusammentreffen. Da aber CD, somit auch jeder Punkt ihrer Verlängerung in der Ebene RS liegt, so müßte die Gerade AB im Punkte O mit der Ebene RS zusammentreffen, was der Annahme $AB \parallel RS$ widerspricht. Es muß folglich $CD \parallel AB$ sein.

13. **Wenn eine außerhalb einer Ebene liegende Gerade mit einer Geraden, welche in der Ebene liegt, parallel ist, so ist die erstere Gerade mit der Ebene selbst parallel.**

Fig. 202.



Es sei (Fig. 202) $AB \parallel CD$, so muß auch $AB \parallel$ Ebene RS sein.

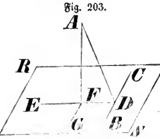
Wäre AB nicht parallel mit der Ebene RS, so müßte die gehörig verlängerte Gerade mit der hinlänglich erweiterten Ebene in einem Punkte O zusammentreffen. Dieser Punkt müßte nun, da er sich sowohl in der Ebene ABCD, in welcher die Verlängerung der AB liegt, als auch in der Ebene RS befindet, nothwendig in der Durchschnittslinie CD der beiden Ebenen liegen; AB und CD würden also verlängert sich in einem Punkte O schneiden, was nicht sein kann, weil $AB \parallel CD$ angenommen wurde. Es ist demnach nicht möglich, daß AB mit der Ebene RS nicht parallel wäre; folglich muß $AB \parallel RS$ sein.

Aufgaben.

§. 140.

1. **Es soll von einem Punkte A (Fig. 203) außerhalb einer Ebene RS auf diese eine senkrechte Gerade gefällt werden.**

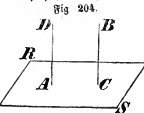
Fig. 203.



Man ziehe in der Ebene RS eine beliebige Gerade BC, fälle in der durch A und BC gelegten Ebene von A auf BC die Senkrechte AD; in D errichte man in der Ebene RS auf BC die Senkrechte DE, und führe darauf in der durch den Winkel ADE gelegten Ebene von A aus die Senkrechte AF; so steht AF auch senkrecht auf der Ebene RS.

Um die Richtigkeit dieser Auflösung zu erweisen, ziehe man in der Ebene RS durch F die FG || DB. Da die Gerade DB auf DA und DE senkrecht steht, so ist sie auch senkrecht auf der durch diese beiden Geraden gelegten Ebene ADE, und weil FG || DB, so muß auch FG auf der Ebene ADE und somit auf der Geraden AF senkrecht stehen. Wenn aber die Gerade AF sowohl auf FG als auf DF, welche beide in der Ebene RS liegen, senkrecht steht, so ist sie auch senkrecht auf der Ebene RS.

Fig 204.



2. **Es soll in dem Punkte A (Fig. 204) einer Ebene RS auf diese eine senkrechte Gerade errichtet werden.**

Man fälle von einem beliebigen außerhalb der Ebene RS liegenden Punkte B auf dieselbe eine Senkrechte BC, und ziehe in der durch A und BC gelegten Ebene durch A die AD || BC; so muß auch diese Gerade AD auf der Ebene RS senkrecht stehen.

3. **Es soll durch einen Punkt außerhalb einer Ebene mit dieser eine parallele Gerade gezogen werden.**

Man lege durch den gegebenen Punkt eine Ebene, welche die frühere in einer Geraden schneidet, und ziehe durch jenen Punkt eine Parallele zu dieser Geraden; so wird dieselbe auch mit der gegebenen Ebene parallel sein.

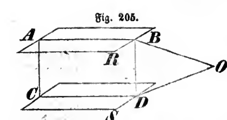
III. Ebenen mit Ebenen verglichen.

Lehrsätze.

§. 141.

1. **Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.**

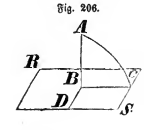
Fig. 205.



Es seien (Fig. 205) die Ebenen AR und CS parallel, und man schneide sie durch die Ebene ABCD, so müssen die Durchschnittslinien AB und CD parallel sein. Wären die Linien AB und CD nicht parallel, so müßten sie gehörig verlängert, sich in einem Punkte, z. B. in O schneiden. Dieser Punkt müßte nun sowohl in der Ebene AR als in der Ebene CS liegen, was nicht sein kann, weil diese Ebenen nach der Voraussetzung parallel sind und somit keinen gemeinschaftlichen Punkt haben können. Es muß also AB ‖ CD sein.

2. Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht und man legt durch die Gerade eine Ebene, so ist diese auf der erstern Ebene senkrecht.

Fig. 206.

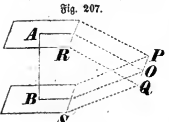


Es sei AB ⊥ RS (Fig. 206), so muß auch die Ebene ABC ⊥ RS sein. Man ziehe in der Ebene RS auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie BC die Senkrechte BD, so ist ABD der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen die Ebene RS. Der Winkel ABD aber ist wegen AB ⊥ RS ein rechter; folglich ist die Ebene ABC ⊥ RS.

§. 142.

3. Wenn eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht steht, so müssen diese Ebenen parallel sein.

Fig. 207.



Es sei AB (Fig. 207) senkrecht auf den Ebenen AR und BS, so muß AR ‖ BS sein. Wären diese beiden Ebenen nicht parallel, so müßten sie hinlänglich erweitert sich in irgend einer geraden Linie PQ schneiden. Nimmt man in dieser Linie einen beliebigen Punkt O an, und zieht OA und OB, so erhält man ein Dreieck ABO, worin zwei rechte Winkel OAB und OBA vorkämen, was nicht sein kann. Die Annahme, daß sich die beiden Ebenen AR und BS durchschneiden, führt also auf eine Ungereimtheit; folglich muß AR ‖ BS sein.

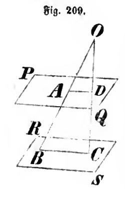
4. Wenn eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, so ist sie auch auf der andern senkrecht.

Fig. 208.

Es sei (Fig. 208) AR ∥ BS, und AB ⊥ AR, so muß auch AB ⊥ BS sein. Man ziehe durch B in der Ebene BS zwei beliebige Gerade BC und BD. Denkt man sich nun durch A und BC eine Ebene gelegt, welche die Ebene AR in der Geraden AE schneidet, so ist AE ∥ BC, daher BAE + ABC = 2R, und wegen BAE = R, auch ABD = R. Denkt man sich ferner auch durch A und BD eine Ebene gelegt, welche die Ebene AR in der Geraden AF durchschneidet, so ist AF ∥ BD, daher BAF + ABD = 2R, und wegen BAF = R auch ABD = R. Die Gerade AB steht demnach auf der Ebene BS so auf, daß sie mit BC und BD rechte Winkel bildet; folglich ist AB ⊥ BS.

5. Eine Gerade ist gegen zwei parallele Ebenen gleich geneigt.

Fig. 209.



Es sei (Fig. 209) PQ ∥ RS. Fällt man vom Punkte O der Geraden BO auf die Ebene RS eine Senkrechte OC, welche die Ebene PQ im Punkte D schneidet, so muß auch OD ⊥ PQ sein. Legt man nun durch den Winkel BOC eine Ebene, welche die Ebenen PQ und RS in den Geraden AD und BC schneidet, so muß AD ∥ BC, daher der Winkel DAO = CBO sein. Der Winkel DAO ist aber der Neigungswinkel der Geraden BO gegen die Ebene PQ, und CBO der Neigungswinkel der BO gegen die Ebene RS; also ist wirklich die BO gegen die beiden parallelen Ebenen PQ und RS gleich geneigt.

Aufgaben.

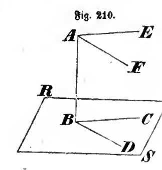
§. 143.

1. Es soll durch einen Punkt in oder außerhalb einer Ebene auf diese eine senkrechte Ebene geführt werden.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt auf die Ebene eine senkrechte Gerade und lege dadurch eine Ebene, so ist dieselbe auf der ersten Ebene senkrecht.

2. Es soll durch einen Punkt A (Fig. 210) außerhalb einer Ebene RS mit dieser eine parallele Ebene gelegt werden.

Fig. 210.



Man fälle von A eine Senkrechte AB auf die Ebene RS, ziehe von B aus in dieser Ebene zwei beliebige Gerade BC und BD, führe sodann in der durch ABC gelegten Ebene die AE ∥ BC, und in der durch ABD gelegten Ebene die AF ∥ BD. Legt man nun durch den Winkel EAF eine Ebene, so muß diese mit der Ebene RS parallel sein.

Es ist nämlich wegen AE ∥ BC und ABC = R, auch BAE = R; ferner wegen AF ∥ BD und ABD = R, auch BAF = R. Die Gerade AB steht also auf AE und AF, daher auch auf der durch den Winkel EAF gelegten Ebene senkrecht. Wenn aber AB auf der durch EAF gelegten Ebene und zugleich auf der Ebene RS senkrecht steht, so müssen diese Ebenen parallel sein.

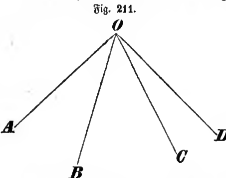
IV. Körperwinkel.

Lehrsätze.

§. 144.

1. **In jedem dreikantigen Körperwinkel ist die Summe von je zwei Kantenwinkeln größer als der dritte.**

Fig. 211.



Um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, soll (Fig. 211) aus den drei ebenen Winkeln AOB, BOC und COD, von denen BOC der größte ist, ein Körperwinkel gebildet werden. Zu diesem Ende wird man die Ebenen AOB und COD um die Geraden OB und OC so lange gegen einander drehen, bis die Geraden OA und OD in einander fallen. Würden diese Geraden gar nicht, oder in der Ebene BOC zusammenfallen, so entstände kein Körperwinkel. Damit ein Körperwinkel entstehe, müssen die Geraden OA und OD außerhalb der Ebene BOC zusammenfallen, was nur möglich ist, wenn AOB + COD > BOC ist. Es ist aber, da BOC der größte unter den drei gegebenen Winkeln ist, offenbar auch AOB + BOC > COD und BOC + COD > AOB. In einem dreikantigen Körperwinkel ist also wirklich die Summe von je zwei Kantenwinkeln größer als der dritte.

2. **In jedem Körperwinkel ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.**

Fig. 212.

Betrachten wir den dreikantigen Körperwinkel O (Fig. 212) und legen durch einen beliebigen Punkt A der Kante OA eine Ebene, welche die beiden andern Kanten in den Punkten B und C durchschneidet, so bildet die Durchschnittsfigur das Dreieck ABC, in welchem

$$A + B + C = 2R$$

ist. Setzt man der Kürze halber AOB = x, BOC = y, AOC = z, ferner OAB = m, OBA = n, OBC = p, OCB = q, OCA = r, OAC = s, so ist, da alle diese Winkel die Winkel von drei Dreiecken vorstellen,

$$x + y + z + m + n + p + q + r + s = 6R.$$

An den dreikantigen Körperwinkel A, B, C ist ferner

$$m + s > A,\ n + p > B,\ q + r > C,$$

daher auch

$$m + n + p + q + r + s > A + B + C$$

oder

$$m + n + p + q + r + s > 2R.$$

Zieht man nun von dem ersten Theile der Gleichung

$$x + y + z + m + n + p + q + r + s = 6R$$

die Größe $m + n + p + q + r + s$, und von dem zweiten Theile 2R ab, so wird die erstere Differenz, wobei eine größere Zahl subtrahirt wird, kleiner ausfallen als die letztere; man wird demnach

$$x + y + z < 4R$$

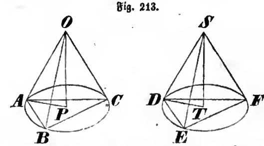
haben.

Auf gleiche Weise kann die Richtigkeit dieses Satzes bei vier- oder mehrkantigen Körperwinkeln erwiesen werden.

§. 145.

3. **Zwei dreikantige Körperwinkel sind kongruent, wenn sie alle drei Kantenwinkel nach der Ordnung wechselseitig gleich haben.**

Fig. 213.



Es sei (Fig. 213) der Kantenwinkel AOB = DSE, BOC = ESF, AOC = DSF, so müssen die Körperwinkel O und S kongruent sein. Um

dieses zu beweisen, schneide man auf allen Kanten von den Spitzen aus gleiche Stücke ab, man mache nämlich $OA = OB = OC = SD = SE = SF$, und lege durch die Punkte A, B, C und D, E, F die Ebenen ABC und DEF. Fällt man nun von den Spitzen O und S auf jene Ebenen die Senkrechten OP und ST, und beschreibt um die Dreiecke ABC und DEF Kreise, so fallen ihre Mittelpunkte genau in die Fußpunkte P und T jener Senkrechten. Weil nun, wie leicht zu sehen,

$$\triangle AOB \cong DSE, \; \triangle BOC \cong ESF, \; \triangle AOC \cong DSF$$

ist, so folgt daraus, daß auch

$$AB = DE, \; BC = EF, \; AC = DF,$$

und somit das Dreieck $ABC \cong DEF$ ist. Sind aber diese beiden Dreiecke kongruent, so müssen auch die um dieselben beschriebenen Kreise gleich sein, folglich der Halbmesser $AP = DT$. In den rechtwinkligen Dreiecken APO und DTS ist nun die Hypothenuse $AO = DS$ und die Kathete $AP = DT$; daher $\triangle APO \cong DTS$ und $PO = TS$.

Denkt man sich nun den Körper SDEF so in den Körper OABC gelegt, daß sich die kongruenten Dreiecke DEF und ABC decken, so werden auch die um diese Dreiecke beschriebenen Kreise, folglich auch ihre Mittelpunkte T und P, in einander fallen; da ferner in P auf die Ebene ABC nur eine Senkrechte möglich ist, so fällt die TS in die Richtung der PO, und wegen $TS = PO$ auch der Punkt S in den Punkt O; daher müssen auch die Ebenen DSE, ESF, DSF mit den Ebenen AOB, BOC, AOC zusammenfallen, oder es sind die Körperwinkel S und O kongruent.

5. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung im Beweisen und Auflösen.

A. Lehrsätze.

§. 146.

1. Zwei Gerade, die von demselben Punkte zu einer Ebene schief gezogen werden, sind einander gleich, wenn ihre Fußpunkte von dem Fußpunkte der Senkrechten gleichweit abstehen.
2. Alle von einem Punkte zu einer Ebene gezogenen Geraden, welche mit der Ebene gleiche Neigungswinkel bilden, sind einander gleich.
3. Von zwei Geraden, welche durch denselben Punkt zu einer Ebene gezogen werden, ist diejenige größer, welche mit der Ebene einen kleinern Neigungswinkel bildet.
4. Von zwei Geraden, welche aus demselben Punkte zu einer Ebene gezogen werden, bildet die größere mit der Ebene einen kleinern Neigungswinkel.
5. Wenn eine Gerade auf einer Ebene schief stehet, und man fällt aus mehreren Punkten der Geraden auf die Ebene senkrechte Linien, so müssen diese in einer und derselben Ebene liegen.
6. Parallele Gerade zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.
7. Wenn man durch einen Punkt zwei Gerade zieht, die zu einer Ebene parallel sind, so ist die durch diese Geraden gelegte Ebene selbst zur gegebenen Ebene parallel.

8. Zwei Ebenen stehen senkrecht auf einander, wenn die auf die Durchschnittslinie in der einen Ebene errichtete Senkrechte auf die andere Ebene senkrecht steht.
9. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, und man fällt aus einem Punkte der einen auf die andere eine senkrechte Gerade, so muß diese ganz in der erstern Ebene liegen.
10. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, und man errichtet in einem Punkte der Durchschnittslinie auf die eine Ebene eine Senkrechte, so muß diese ganz in die andere Ebene hineinfallen.
11. Wenn zwei Ebenen auf derselben dritten Ebene senkrecht stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf dieser Ebene senkrecht.
12. Wenn drei Gerade in demselben Punkte auf einander senkrecht stehen, so müssen auch die durch sie gelegten Ebenen auf einander wechselseitig senkrecht sein.
13. Wenn durch einen Punkt drei Ebenen gelegt werden, welche wechselseitig auf einander senkrecht sind, so stehen auch ihre Durchschnittslinien auf einander gegenseitig senkrecht.
14. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so bilden die beiden Ebenen mit dieser dritten gleiche Neigungswinkel.
15. Zwei dreiseitige Körperwinkel sind kongruent, wenn sie zwei Kantenwinkel wechselseitig gleich haben, deren Ebenen gegen einander gleich geneigt sind.

B. Aufgaben.

§. 147.

1. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden auf diese eine senkrechte Ebene zu legen.
2. In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, welcher von drei außerhalb der Ebene liegenden Punkten gleichweit absteht.
3. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit zwei nicht parallelen Geraden parallel ist.
4. Eine Ebene zu bestimmen, welche von zwei sich nicht schneidenden Geraden gleichweit absteht.
5. Eine Gerade zu ziehen, welche zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade senkrecht schneidet.
6. Eine Gerade zu ziehen, welche von zwei gegebenen sich schneidenden Ebenen gegebene Abstände hat.
7. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, von welcher ein gegebener Punkt eine gegebene Entfernung hat.
8. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit drei andern sich senkrecht schneidenden Ebenen gleiche Neigungswinkel bildet.

Zweiter Abschnitt.

Körper.

I. Erklärungen und besondere Eigenschaften der Körper.

1. Eckige Körper.

§. 148.

Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein eckiger Körper oder ein Polyeder.

Drei Ebenen schließen einen Raum nicht vollständig ab; zur Begrenzung eines eckigen Körpers sind daher wenigstens vier Ebenen erforderlich.

Die Ebene, auf welcher ein Körper aufstehend gedacht wird, heißt seine Grundfläche oder Basis. Liegt dieser gegenüber auch eine Fläche, so wird dieselbe die obere Grundfläche des Körpers genannt. Die übrigen Grenzebenen nennt man Seitenflächen des Körpers.

Die Durchschnittslinien zweier Grenzebenen heißen Kanten, und zwar die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen insbesondere Seitenkanten des Körpers.

Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Grenzebenen theilt man die eckigen Körper in regelmäßige und unregelmäßige Körper ein. Regelmäßig heißt ein Körper, wenn er von lauter regelmäßigen und kongruenten Vielecken eingeschlossen wird; im entgegengesetzten Falle unregelmäßig.

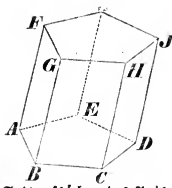
Unter den unregelmäßigen Körpern kommen zwei Arten besonders häufig vor: Körper, deren alle Seitenkanten parallel sind, und Körper, deren alle Seitenkanten in einem Punkte zusammenlaufen. Die Körper der ersteren Art nennt man prismatische, die Körper der letzteren Art pyramidale Körper.

a) Das Prisma.

§. 149.

Ein eckiger Körper, welcher zwei parallele Grundflächen und lauter parallele Seitenkanten hat, heißt ein Prisma.

Fig. 214.



Der Körper ABCDEFGHJK (Fig. 214) ist ein Prisma, wenn die Ebene ABCDE ‖ FGHJK, und wenn AF ‖ BG ‖ CH ‖ DJ ‖ EK ist.

Aus der Erklärung eines Prisma geht hervor, daß seine beiden Grundflächen kongruente Vielecke sein müssen; denn je zwei gleichliegende Seiten sind als Parallele zwischen zwei parallelen Seitenkanten gleich, und je zwei gleichliegende Winkel sind als Winkel, deren Schenkel parallel sind, ebenfalls gleich.

Auch ist von selbst klar, daß alle Seitenflächen des Prisma Parallelogramme, nnd alle Seitenkanten gleich lang sind.

Eine Senkrechte, welche von irgend einem Punkte der obern Grundfläche auf die untere Grundfläche gefällt wird, heißt die Höhe des Prisma.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten des Prisma gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt desselben.

Wird von einem Prisma durch eine mit der Basis nicht parallele Ebene ein Theil abgeschnitten, so heißt der Rest ein abgekürztes Prisma.

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten heißt ein Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen unterscheidet man gerade und schiefe Prismen. Wenn die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht aufstehen, so heißt das Prisma ein gerades; sonst ein schiefes.

§. 150.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird ein Parallelepiped genannt. Ein Parallelepiped kann so wie jedes Prisma gerade oder schief sein. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen alle Kanten gleich sind, wird ein Kubus oder Würfel genannt; jede Kante heißt auch eine Seite des Würfels.

Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Würfel von sechs Quadraten begrenzt.

Lehrsätze.

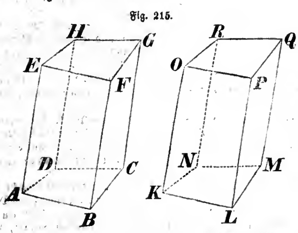
§. 151.

1. Wird ein Prisma durch eine Ebene geschnitten, welche mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche kongruent.

Die gleichliegenden Seiten der Basis und des Schnittes sind als Parallele zwischen Parallelen gleich; die gleichliegenden Winkel haben parallele Schenkel, sind also auch gleich; folglich ist der Schnitt mit der Grundfläche kongruent.

2. **Zwei Prismen sind kongruent, wenn in beiden ein Körperwinkel vorkommt, welcher von drei kongruenten in derselben Ordnung auf einander folgenden Ebenen gebildet wird.**

Fig. 215.



Es seien (Fig. 215) die Ebenen, welche die Körperwinkel A und K einschließen, in derselben Ordnung kongruent, nämlich ABCD ≅ KLMN, ABFE ≅ KLPO, ADHE ≅ KNRO. Nach dieser Voraussetzung ist der Winkel BAD = LKN, BAE = LKO, DAE = NKO, daher der Körperwinkel A ≅ K. Denkt man sich nun das Prisma KQ über das Prisma AG so gelegt, daß die kongruenten Körperwinkel K und A zusammenfallen, so müssen sich die kongruenten Ebenen KLMN und ABCD, KLPO und ABFE, KNRO und ADHE vollkommen decken, daher die Punkte K, L, M, N, O, P, R folgeweise auf die Punkte A, B, C, D, E, F, H fallen. Wenn aber die obern Grundflächen, welche mit den untern, und daher auch unter einander kongruent sind, in drei Punkten O und E, P und F, R und H zusammenfallen, so müssen sie sich vollkommen decken, daher auch der Punkt Q auf G fällt. Die beiden Prismen lassen sich also so über einander legen, daß alle ihre Eckpunkte, somit auch alle Seitenflächen zusammenfallen; folglich sind sie kongruent.

b) Die Pyramide.

§. 152.

Ein eckiger Körper, dessen Grundfläche irgend ein Vieleck ist, und dessen Seitenkanten alle in einem Punkte zusammenlaufen, heißt eine **Pyramide**.

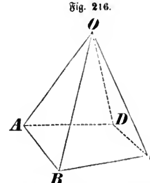


Fig. 216.

Der Körper OABCD (Fig. 216) ist eine Pyramide.

Der Punkt O, in welchem alle Seitenkanten zusammenstoßen, wird der Scheitel oder die Spitze der Pyramide genannt.

Aus der Erklärung der Pyramide folgt, daß ihre Seitenflächen Dreiecke sind.

Eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide.

Wird eine Pyramide durch eine mit der Basis parallele Ebene geschnitten, so heißt das zwischen den beiden parallelen Ebenen liegende Stück eine abgekürzte Pyramide oder ein Pyramidalstutz.

Nach der Seitenanzahl der Grundfläche theilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, wird eine gerade genannt; jede andere ist schief. In einer geraden Pyramide sind daher alle Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke.

Ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ein regelmäßiges Vieleck, so wird die Pyramide selbst regelmäßig genannt. In einer regelmäßigen Pyramide sind demnach alle Seitenflächen kongruent, und die Höhe fällt in den Mittelpunkt der Grundfläche.

Lehrsatz.

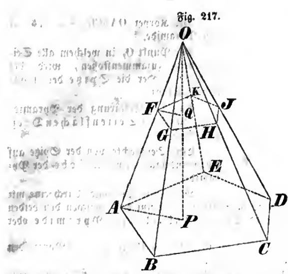
§. 153.

Wird eine Pyramide durch eine mit der Basis parallele Ebene geschnitten, so ist der Durchschnitt eine mit der Basis ähnliche Figur, und ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Scheitel der Pyramide.

Es sei (Fig. 217) die Ebene FGHJK $\parallel$ ABCDE. Da diese beiden Ebenen von den Seitenflächen geschnitten werden, so müssen die Durchschnittslinien FG und AB, GH und BC, HJ und CD, ... parallel, und daher die Winkel F und A, G und B, H und C, ... gleich sein. Weil $\triangle$ OFG $\sim$ OAB, so ist FG : AB = OG : OB, und weil $\triangle$ OGH $\sim$ OBC, so ist auch GH : BC = OG : OB; daraus folgt FG : AB = GH : BC. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß auch GH : BC = HJ : CD, u. s. w. ist. Der Durchschnitt und die Basis haben also nach der Ordnung gleiche Winkel und proporzionirte Seiten; folglich sind sie ähnlich.

Fällt man von O auf die Basis die Senkrechte OP, so muß diese auch auf der Ebene FGHJK senkrecht stehen. Legt man nun durch den

Fig. 217.



Winkel AOP eine Ebene, welche die Basis und die die damit parallele Durchschnittsebene in den Geraden AP und FQ schneidet, so muß AP ∥ FQ, und daher OQ : OP = OF : OA sein; aber es ist auch FG : AB = OF : OA; daher OQ : OP = FG : AB. Weil nun die Vielecke FGHJK und ABCDE ähnlich sind, so hat man FGHJK : ABCDE = $FG^2 : AB^2$; folglich auch FGHJK : ABCDE = $OQ^2 : OP^2$.

c) Regelmäßige Körper.

§. 154.

Lehrsatz.

Es gibt nur fünf regelmäßige Körper.

Beweis. Die Summe der Kantenwinkel, die an einem Körpereck vorkommen, muß kleiner als 4R oder 360° sein: In einem regelmäßigen (gleichseitigen) Dreiecke beträgt jeder Winkel 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf, aber nie mehr an einem Ecke zusammenstoßen, weil die Summe von sechs oder mehr solchen Winkeln schon 360° oder darüber beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei reguläre Körper gebildet werden, nämlich das Tetraëder, Oktaëder und Ikosaëder.

Das Tetraëder (Fig. 218) wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einem Ecke zusammenstoßen, es hat 4 Ecke und 6 Kanten.

Das Oktaëder (Fig. 219) wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier ein Körpereck bilden; es hat 6 solche Ecke und 12 Kanten.

Fig. 218.

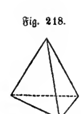


Fig. 219.

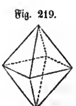
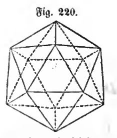
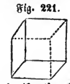


Fig. 220.



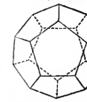
Das Ikosaëder (Fig. 220) wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je fünf einen Körperwinkel bilden; es hat 12 Ecke und 30 Kanten.

Fig. 221.



In einem regelmäßigen Vierecke (Quadrate) ist jeder Winkel ein rechter. Von solchen Winkeln können nur drei in einem Ecke zusammenstoßen; vier solche Winkel geben schon vier Rechte. Es gibt daher einen einzigen von Quadraten eingeschlossenen regulären Körper; er heißt Hexaëder, Kubus oder Würfel, hat 6 Seitenflächen, 8 dreikantige Körperecke und 12 Kanten (Fig. 221).

Fig. 222.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°. Von solchen Winkeln können wieder nur drei in einem Ecke zusammenkommen. Es gibt daher nur einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten Körper; dieser ist das Dodekaëder (Fig. 222) und hat 12 Seitenflächen, 20 Ecke und 30 Kanten.

Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln kann kein Körpereck gebildet werden, weil schon drei derselben 360° betragen. Dasselbe gilt um so mehr von den Winkeln eines regelmäßigen Polygons von mehr als sechs Seiten.

Es kann also nur fünf reguläre Körper geben.

2. Runde Körper.

§. 155.

Körper, welche theils von ebenen, theils von gekrümmten Flächen, oder von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt werden, heißen runde Körper.

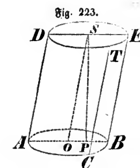
Bei denjenigen runden Körpern, deren Grenzflächen zum Theil Ebenen sind, werden diese als Grundflächen betrachtet, weil man sich die Körper darüber aufgerichtet vorstellen kann; die gekrümmte Fläche wird die Mantelfläche genannt.

Hier sollen nur jene runden Körper in Betrachtung gezogen werden, welche mit den oben angeführten eckigen im Zusammenhange stehen. Dem Prisma entspricht nämlich der Zilinder, der Pyramide der Kegel, den regulären Körpern die Kugel.

a) Der Zilinder.

§. 156.

Fig. 223.



Der **Zilinder** ist ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreisflächen und einer solchen gekrümmten Fläche, die von jeder durch die Mittelpunkte jener Kreise gelegten Ebene in geraden Linien geschnitten wird, begrenzt ist.

Die beiden Kreise ABC und DET (F. 223) sind die **Grundflächen** des Zilinders; die Gerade OS, welche die Mittelpunkte verbindet, nennt man die **Axe**, und den Abstand SP der beiden Grundflächen die **Höhe** des Zilinders.

Ist die Axe eines Zilinders auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Zilinder ein **gerader**, sonst ein **schiefer**. In einem geraden Zilinder stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

Die geraden Linien AD und BE, in denen die Mantelfläche von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, heißen **Seiten** des Zilinders.

Ein gerader Zilinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird **gleichseitig** genannt.

Ein Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Zilinder, die eine gemeinschaftliche Axe haben, eingeschlossen wird, heißt ein **ausgehöhlter Zilinder** oder eine **zilindrische Röhre**.

Da sich der Kreis als ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten betrachten läßt, so kann man sagen:

Der Zilinder ist ein Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke von unendlich viel Seiten sind.

Daraus folgt mit Bezug auf die für das Prisma erwiesenen Sätze:

1. **Alle Seiten des Zilinders sind gleich und parallel.**
2. **Wenn ein Zilinder durch eine Ebene, die mit der Basis parallel ist, geschnitten wird, so ist der Schnitt mit der Basis kongruent, somit ein Kreis von demselben Halbmesser.**

b) Der Kegel.

§. 157.

Der **Kegel** ist ein Körper, welcher von einer Kreisfläche und einer in einem Punkte zusammenlaufenden gekrümmten Fläche, die von jeder durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des Kreises gelegten Ebene in geraden Linien geschnitten wird, begrenzt ist.

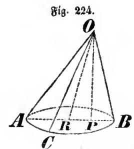


Fig. 224.

Der Kreis ABC (Fig. 224) ist die Grundfläche des Kegels; der Punkt O, in welchen die Mantelfläche ausläuft, heißt der Scheitel oder die Spitze, und die Gerade OR, welche den Scheitel mit dem Zentrum der Grundfläche verbindet, die Axe des Kegels; die Senkrechte OP vom Scheitel auf die Grundfläche ist die Höhe. Wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, heißt der Kegel ein gerader, sonst ein schiefer. In einem geraden Kegel stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt das zwischen den beiden parallelen Ebenen liegende Stück ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstutz.

Die Geraden AO und BO, in welchen die Mantelfläche von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, nennt man die Seiten des Kegels. In einem geraden Kegel sind alle Seiten gleich.

Ein gerader Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Basis gleich ist, heißt gleichseitig.

So wie sich der Zilinder als Prisma betrachten läßt, so kann auch der Kegel als eine Pyramide, deren Basis ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten ist, betrachtet werden.

Daraus folgt mit Bezug auf den ähnlichen für die Pyramide erwiesenen Satz:

Wenn ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, und es verhalten sich die Flächenräume der beiden Kreise wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Scheitel des Kegels.

c) Die Kugel.

§. 158.

Die Kugel ist ein von einer gekrümmten Fläche so begrenzter Körper, daß alle Punkte der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit abstehen.

Dieser innerhalb der Kugel liegende Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum. Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Oberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel.

Man kann sich die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um den Durchmesser entstanden denken. Dieser Durchmesser heißt dann die Axe und dessen Endpunkte sind die Pole der Kugel.

Wenn man eine Kugel durch eine Ebene schneidet, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück der Kugel ein **Kugelabschnitt** und seine gekrümmte Oberfläche eine **Kugelmütze** oder **Kalotte**.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dazwischen befindliche Theil der Kugeloberfläche eine **Kugelzone**.

Eine Gerade, welche mit der Kugeloberfläche einen einzigen Punkt gemeinschaftlich hat, heißt eine **Tangente** der Kugel. Es ist von selbst klar, daß die Tangente auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht stehen müsse.

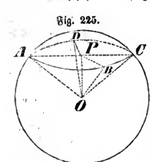
Eine Ebene, welche mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, wird eine **Berührungsebene** der Kugel genannt.

Lehrsatz.

§. 159.

Wird die Kugel durch eine Ebene geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis.

Fig. 225.



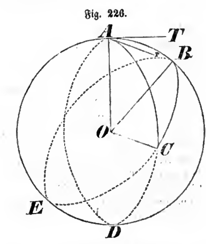
Es sei ABCD (Fig. 225) der Durchschnitt einer Ebene mit der Oberfläche der Kugel. Da die Punkte A, B, C, D, . . . in der Oberfläche der Kugel liegen, so sind die Geraden AO, BO, CO, DO, . . . als Halbmesser der Kugel gleich. Fällt man nun von O auf die Ebene ABCD die Senkrechte OP, so sind die rechtwinkligen Dreiecke APO, BPO, CPO, DPO, . . . kongruent, daher $AP = BP = CP = DP = \ldots$; es liegen also die Punkte A, B, C, D, . . . in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der aus dem Zentrum der Kugel auf die Durchschnittsebene gefällten Senkrechten liegt.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke APO folgt $AP = \sqrt{AO^2 - OP^2}$. Da nun AO als Halbmesser der Kugel eine beständige Größe ist, so wird der Halbmesser AP und somit auch der Kreis ABCD desto größer sein, je kleiner OP ist. Je näher am Mittelpunkte der Kugel also der Schnitt geführt wird, desto größer wird der Kreis; am größten wird er, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt selbst geht; ein solcher Kreis, dessen Mittelpunkt im Zentrum der Kugel liegt, dessen Halbmesser also so groß ist als der Halbmesser der Kugel, heißt ein **größter Kreis der Kugel**. Wenn dagegen OP zunimmt, so wird AP und somit auch der Kreis ABCD immer kleiner. Wenn endlich der Abstand OP dem Halbmesser der Kugel gleich wird, so verschwindet jener Kreis; die Ebene hat in diesem Falle mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich, sie wird eine **Berührungsebene** der Kugel.

§. 160.

Wenn sich drei größte Kugelkreise ABD, ACD und BCE (Fig. 226) durchschneiden, so heißt der von drei Bögen AB, AC und BC jener größten Kreise begrenzte Theil ABC der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck. Die Kreisbögen AB, AC und BC werden die Seiten des sphärischen Dreieckes, und die Neigungswinkel der Ebenen von je zwei Seiten die Winkel desselben genannt. So ist z. B. der sphärische Winkel A der Neigungswinkel der Ebenen ABD u. ACD, und somit identisch mit dem Winkel TAT', welchen die Tangenten der Bögen AB und AC in A bilden.

Fig. 226.



Zieht man die Halbmesser AO, BO, CO, so sind die Seiten AB, AC und BC als Bögen von größten Kugelkreisen die Maße der entsprechenden Mittelpunktswinkel AOB, AOC und BOC, deren Ebenen am Mittelpunkte O einen dreiseitigen körperlichen Winkel OABC bilden. Aus den Eigenschaften der Körperwinkel ergeben sich daher für ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten einzeln nicht größer als 180° sind, folgende zwei Sätze:

1. Jede Seite ist kleiner als die Summe der beiden andern.
2. Die Summe aller drei Seiten ist kleiner als 360°, oder kleiner als ein größter Kugelkreis.

3. Lehrsätze und Aufgaben zur Selbstübung im Beweisen und Auflösen.

A. Lehrsätze.

§. 161.

1. Jeder Diagonalschnitt eines Prisma ist ein Parallelogramm.
2. Wenn man ein dreiseitiges Prisma durch eine Ebene schneidet, welche mit einer Seitenfläche parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm.
3. Wenn in einem dreiseitigen Prisma zwei Seitenflächen einander gleich sind, und man legt durch ihre gemeinschaftliche Kante eine

Ebene, welche auf der dritten Seitenfläche senkrecht stehet, so wird dadurch sowohl der Neigungswinkel jener zwei Seitenflächen, als auch die dritte Seitenfläche halbirt.

4. Wenn man durch die Seitenkanten eines dreiseitigen Prisma Ebenen legt, welche auf den gegenüberliegenden Seitenflächen senkrecht stehen, so schneiden sich dieselben in einer und derselben Geraden, welche zu den Seitenkanten parallel ist.
5. Die vier Diagonalen eines Parallelepipeds schneiden sich in einem Punkte.
6. Wenn man in einem Parallelepiped die Halbirungspunkte von je zwei gegenüberliegenden Kanten durch Gerade verbindet, so schneiden sich die sechs Paare Verbindungslinien in einem Punkte.
7. Wenn die Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide in der Periferie eines Kreises liegen, und es fällt die Höhe in den Mittelpunkt dieses Kreises, so ist die Pyramide eine gerade.
8. Wenn man durch die Seiten eines regulären Polygons Ebenen legt, welche gegen die Ebene desselben gleich geneigt sind, so bilden diese mit dem gegebenen Polygone eine regelmäßige Pyramide.
9. In jedem Polyeder ist die Summe aus der Anzahl der Flächen und jener der Ecken um 2 größer als die Anzahl der Kanten. (Euler'scher Satz von den Polyedern.)
10. Jedes reguläre Polyeder hat einen Punkt, der von allen Seitenflächen und eben so von allen Eckpunkten gleichweit abstehet.
11. Alle von einem Punkte nach der Kugeloberfläche gezogenen Tangenten sind einander gleich.

B. Aufgaben.

§. 162.

1. Den Mittelpunkt eines regulären Körpers zu finden.
2. Durch vier gegebene Punkte, welche weder in einer Geraden noch in einer Ebene liegen, eine Kugel zu legen.
3. An eine Kugel eine Tangente zu ziehen, welche
   a) mit einer gegebenen Geraden parallel ist,
   b) eine gegebene Ebene unter einem gegebenen Winkel schneidet.
4. An eine Kugel eine Berührungsebene zu legen, welche
   a) einer Geraden parallel ist,
   b) eine Ebene unter einem gegebenen Winkel schneidet.
5. Durch eine Gerade außerhalb der Kugeloberfläche eine Ebene zu legen, welche diese Oberfläche in einem Kreise von gegebenem Halbmesser schneidet.

II. Oberfläche der Körper.

1. Prisma.

§. 163.

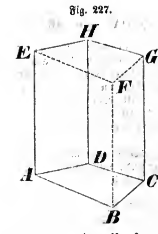


Fig. 227.

Die Oberfläche eines Prisma findet man, wenn man zuerst die Seitenflächen als Parallelogramme berechnet, durch deren Summirung die Seitenoberfläche erhalten wird, und noch die doppelte Grundfläche dazu addirt. Heißt O die Oberfläche, S die Seitenoberfläche und B die Basis, so ist $O = S + 2B$.

Da beim geraden Prisma die Seitenflächen Rechtecke sind, deren gemeinschaftliche Höhe eine Seitenkante AE (Fig. 227) vorstellt, so ist

$$S = AB.AE + BC.AE + CD.AE + DA.AE = + (AB + BC + CD + DA).AE,$$

d. h. die Seitenoberfläche eines geraden Prisma wird gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit einer Seitenkante multiplizirt.

Beispiel.

Wie groß ist die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Länge 2° 4′, die Breite 1° 5′, und die Höhe 1° 3′ ist;

Länge = 16′	Umfang der Basis = 54′	Basis = 16×11
Breite = 11′	Seitenkante = 9′	= 176□′
Höhe = 9′	Seitenoberfläche = 486□′	
	doppelte Basis = 352 „	
	Oberfläche = 838□′ = 23□° 10□′.	

2. Pyramide und Pyramidalstutz.

§. 164.

Um die Oberfläche O einer Pyramide zu erhalten, berechnet man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche S; dazu addirt man noch den Flächeninhalt B der Basis; also $O = S + B$.

Ist die Pyramide eine regelmäßige, so wird die Seitenoberfläche S gefunden, wenn man nur ein Seitendreieck berechnet, und dessen Fläche mit der Anzahl der Seitenkanten multiplizirt.

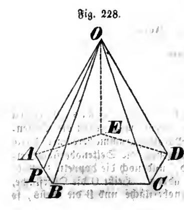


Fig. 228.

Ist OP (Fig. 228) die Höhe des Dreieckes OAB, so ist

$$\triangle\ OAB = AB\ .\ \frac{OP}{2},$$

daher wenn die Pyramide nseitig ist,

$$S = n\ .\ \triangle\ OAB = n\ .\ AB\ .\ \frac{OP}{2}.$$

Die Seitenoberfläche einer regelmäßigen Pyramide wird demnach gefunden, wenn man den Umfang der Grundfläche n.AB mit der halben Senkrechten OP, welche vom Scheitel auf eine Seite der Grundfläche gefällt wird, multiplizirt.

Bei der abgekürzten Pyramide berechnet man zuerst die Summe S aller Seitenflächen, welche Trapeze sind, und addirt dazu die beiden Grundflächen B und b; also $O = S + B + b$.

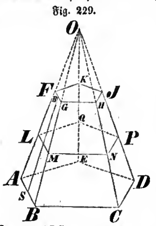


Fig. 229.

Entsteht der Pyramidalstutz durch den Schnitt einer regelmäßigen Pyramide, so sind die Seitenflächen kongruente Trapeze; man braucht daher, um S zu erhalten, nur den Flächeninhalt eines solchen Trapezes mit der Anzahl derselben zu multipliziren.

Wird eine Seitenkante AF (Fig. 229) des Pyramidalstutzes in L halbirt, und durch diesen Punkt eine mit der Basis parallele Ebene gelegt, so halbirt dieselbe auch alle übrigen Seitenkanten, und der Schnitt LMNPQ ist ein regelmäßiges Polygon. Es sei nun die Basis nseitig, und RS die Höhe des Trapezes ABGF, so ist Trapez ABGF = LM.RS, daher S = n. Trapez ABGF = n . LM . RS.

Die Seitenoberfläche einer abgekürzten regelmäßigen Pyramide ist also gleich n.LM, d. i. dem Umfange des mittlern Durchschnittes LMNPQ multiplizirt mit der Höhe RS einer Seitenfläche.

Beispiele.

§. 165.

1) Die Basis einer Pyramide ist ein Quadrat, dessen jede Seite 10′ beträgt, die Höhen der Seitendreiecke sind 15′, 14·6′, 15·3′, 15·9′; wie groß ist die Oberfläche dieser Pyramide?

Dreieck I $= \frac{10 \times 15}{2} = 75$ □′
" II $= \frac{10 \times 14{\cdot}6}{2} = 73$ "
" III $= \frac{10 \times 15{\cdot}3}{2} = 76{\cdot}5$ "
" IV $= \frac{10 \times 15{\cdot}9}{2} = 79{\cdot}5$ "
Basis $= 10^2 = 100$ "
Oberfläche $= 404$ □′.

2) Die Basis einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat, worin jede Seite 12′ beträgt, die Höhe derselben ist 7′; wie groß ist die Oberfläche?

Die Höhe eines Seitendreieckes ist $= \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$
$= 9{\cdot}22'$
Umfang der Basis $= 48'$
Seitenoberfläche $= 221{\cdot}28$ □′
Basis $= 12^2 = 144$ "
Oberfläche $= 365{\cdot}28$ □′.

3) In einer abgekürzten, dreiseitigen regelmäßigen Pyramide beträgt die Höhe einer Seitenfläche 1° 5′ 2″, und eine Seite des mittlern Durchschnittes 3′ 10″; wie groß ist die Seitenoberfläche?

Seite des mittlern Durchschnittes = 3′ 10″ = 46″
Umfang " " " = 138″
Höhe einer Seitenfläche = 1° 5′ 2″ = 134″
Seitenoberfläche = 18492 □″
= 3 □° 20 □′ 60 □″.

3. Reguläre Körper.

§. 166.

Um die **Oberfläche eines regulären Körpers** zu erhalten, berechne man den Flächeninhalt einer Grenzebene, und multiplizire denselben mit der Anzahl der Grenzebenen.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen jede Seite 4′ 6″ beträgt?

Seite = 4′ 6″ = 54″.
Eine Grenzfläche = 54^2 = 2916 □″.
Oberfläche = 17496 □″ = 3 □° 13 □′ 72 □″.

2) In einem Ikosaëder beträgt jede Seite 8″; wie groß ist die Oberfläche?

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, worin eine Seite 8″ beträgt, ist 27·72 □″; die Oberfläche des Ikosaëders ist daher

$27{\cdot}72 \times 20 = 554{\cdot}4$ □″ = 3 □′ 122·4 □″.

4. Zilinder.

§. 167.

Beim Zilinder berechnet man zuerst die Mantelfläche M, und addirt dazu die doppelte Basis 2B; also $O = M + 2B$.

In einem geraden Zilinder läßt sich der Mantel in ein Rechteck abwickeln, welches mit dem Zilinder einerlei Höhe hat, und dessen Grundlinie dem Umfange der Basis des Zilinders gleich ist. Die Mantelfläche eines geraden Zilinders wird daher gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit der Seite multiplizirt. Dieß ergibt sich auch, wenn der gerade Zilinder als ein gerades Prisma, dessen Basis ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten ist, betrachtet wird.

Ist s die Seite eines geraden Zilinders, dessen Basis r zum Halbmesser hat, so ist die Mantelfläche $= 2sr\pi$, die Basis $r^2\pi$, daher die ganze Oberfläche

$$O = 2sr\pi + 2r^2\pi = 2r\pi(s+r).$$

Im gleichseitigen Zilinder ist $s = 2r$, daher

$$O = 2r\pi \cdot 3r = 6r^2\pi.$$

Beispiele.

1) Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Zilinders, dessen Grundfläche 3′ 4″ zum Halbmesser hat, und dessen Höhe 4′ 8″ ist?

Umfang der Basis $= 80 \times 3{\cdot}1416 = 251{\cdot}328''$

Mantelfläche $= 251{\cdot}328 \times 56 = 14074{\cdot}368 \square''$

Basis $= 251{\cdot}328 \times 20 = 5026{\cdot}56 \square''$

Doppelte Basis $= 10053{\cdot}12 \square''$

Oberfläche $= 24127{\cdot}488 \square''$

$= 4 \square^0\ 23 \square'\ 79 \square''$.

2) Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Zilinders, wenn der Halbmesser der Grundfläche 2′ 5″ beträgt?

Basis $= 29^2 \times 3{\cdot}14159 = 2642{\cdot}078 \square''$

Oberfläche $= 2642{\cdot}078 \times 6 = 15852{\cdot}468 \square''$

$= 3 \square^0\ 2 \square'\ 12 \square''$.

5. Kegel und Kegelstutz.

§. 168.

Die Oberfläche eines Kegels wird gefunden, wenn man zuerst die Mantelfläche M, dann die Basis B berechnet, und beide addirt; somit ist $O = M + B$.

Bei einem geraden Kegel wird die Mantelfläche berechnet, wenn man den Umfang der Basis mit der halben Seite des Kegels multiplizirt. Denn wenn man sich die Mantelfläche des geraden Kegels abgewickelt denkt, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Basis, und dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist; nun ist der Flächeninhalt eines Kreissektors gleich der Länge des Bogens multi-

plizirt mit dem halben Halbmesser, folglich ist die Mantelfläche eines geraden Kegels gleich dem Umfange der Basis multiplizirt mit der halben Seite. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich auch, wenn man den geraden Kegel als eine gerade Pyramide, deren Basis ein reguläres Polygon von unendlich viel Seiten ist, betrachtet.

Heißt s die Seite eines geraden Kegels, und r der Halbmesser der Basis, so ist die Mantelfläche $= 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = rs\pi$, die Basis $= r^2\pi$, daher die ganze Oberfläche

$$O = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s+r).$$

Wäre die Höhe h mit dem Halbmesser r bekannt, so ist

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}, \quad \text{daher}$$

$$O = r\pi\left\{r + \sqrt{h^2 + r^2}\right\}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher

$$O = r\pi \cdot 3r = 3r^2\pi.$$

§. 169.

Beim Kegelstutz berechnet man die Mantelfläche M, und addirt dazu die beiden Grundflächen B und b; also $O = M + B + b$.

Da ein abgekürzter gerader Kegel als eine abgekürzte regelmäßige Pyramide von unendlich viel Seiten betrachtet werden kann, worin die Seite des Kegelstutzes als Höhe eines Trapezes erscheint; so folgt: Die Mantelfläche eines abgekürzten geraden Kegels ist gleich dem Umfange des mittlern Durchschnittes multiplizirt mit einer Seite.

Heißt s die Seite, R der Halbmesser der untern, r der Halbmesser der obern Basis, so ist $\frac{R+r}{2}$ der Halbmesser des mittlern Durchschnittes, daher sein Umfang $(R+r)\pi$, und somit die Mantelfläche

$$(R+r)s\pi.$$

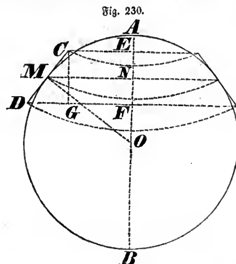
Die ganze Oberfläche ist gleich $R^2\pi + r^2\pi + (R+r)s\pi$.

Es sei AMB (Fig. 230) ein Halbkreis. Man nehme in dem Umfange irgend einen Punkt M, ziehe durch denselben die Tangente CD, mache CM = DM, und fälle von den Punkten C, M, D auf den Durchmesser AB die Senkrechten CE, MN, DF. Denkt man sich nun die ganze Figur um den Durchmesser AB herumgedreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkommt, so beschreibt der Halbkreis AMB die Oberfläche einer Kugel, und die Tangente CD die Mantelfläche eines abgekürzten geraden Kegels, dessen Grundflächen die Senkrechten CE und DF zu Halbmessern haben, und dessen Mitteldurchschnitt, zugleich ein Durchschnitt der Kugel, der mit dem Halbmesser MN beschriebene Kreis ist. Ein solcher Kegelstutz heißt der Kugel umschrieben.

Zur Berechnung der Mantelfläche M eines solchen abgekürzten Kegels hat man als Umfang des mittlern Durchschnittes $2 \cdot MN \cdot \pi$ und als Seite die Tangente CD; daher ist $M = 2\pi \cdot MN \cdot CD$. Diese Größe läßt sich nun noch auf eine andere Art darstellen. Zieht man $CG \perp DF$,

so sind die Dreiecke MNO und CGD ähnlich, weil ihre Seiten auf einander wechselseitig senkrecht stehen, daher ist $MN : CG = MO : CD$, oder

Fig. 230.



$MN \cdot CD = MO \cdot CG$. Substituirt man diesen Werth in dem früher für M erhaltenen Ausdrucke, so hat man $M = 2\pi \cdot MO \cdot CG$. Da nun $2\pi \cdot MO$ die Periferie eines größten Kreises der Kugel, und CG die Höhe des Kegelstutzes vorstellt, so gilt der Satz:

Die Mantelfläche eines der Kugel umschriebenen Kegelstutzes ist gleich der Periferie des größten Kreises der Kugel multiplizirt mit der Höhe des Kegelstutzes.

Beispiele.

§. 170.

1) Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Seite 2′5″ ist, und dessen Grundfläche 1′8″ zum Halbmesser hat?

Umfang der Basis $= 40 \times 3{\cdot}1416 = 125{\cdot}664''$

Mantelfläche $= 125{\cdot}664 \times \frac{29}{2} = 1822{\cdot}128\square''$

Basis $= 125{\cdot}664 \times 10 = 1256{\cdot}64\ \square''$

Oberfläche $= 3078{\cdot}768\square''$
$= 21\square'\ 54{\cdot}768\square''$.

2) Man suche die Mantelfläche eines Kegels, dessen Höhe 3′ 9″ ist, und dessen Grundfläche 8″ zum Halbmesser hat.

Umfang der Basis $= 16 \times 3{\cdot}1416 = 50{\cdot}2656''$

Seite des Kegels $= \sqrt{45^2 + 8^2} = 45{\cdot}706''$

Mantelfläche $= 1148{\cdot}7\square'' = 7\square'\ 140{\cdot}7\square''$.

3) Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 1′ 8″ beträgt?

$$\text{Basis} = 10^2.3\cdot1416 = 314\cdot16\,\square''$$
$$\text{Oberfläche} = 314\cdot16 \times 3 = 942\cdot48\,\square''$$
$$= 6\,\square'\ 78\cdot48\,\square''.$$

4) Wie groß ist die Mantelfläche eines abgekürzten geraden Kegels, dessen Seite 5′ ist, und dessen Grundflächen 6′ und 4′ zu Halbmessern haben?

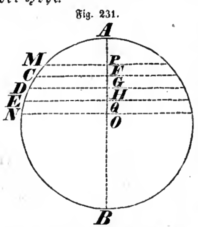
$$\text{Halbmesser des mittlern Durchschnittes} = \frac{6+4}{2} = 5'$$
$$\text{Umfang} \quad " \quad " \quad " \quad = 10 \times 3\cdot1416 = 31\cdot416'$$
$$\text{Mantelfläche} = 31\cdot416 \times 5 = 157\cdot08\,\square'.$$

6. Kugelzone und Kugel.

§. 171.

Die krumme Oberfläche einer Kugelzone ist gleich dem Umfange eines größten Kreises multiplizirt mit der Höhe.

Fig. 231.



Beweis. Theilt man (Fig. 231) den Kreisbogen MN in mehrere Theile MC, CD, DE, . . ., zieht dann auf den Durchmesser die Senkrechten MP, CF, DG, . . ., und dreht den Halbkreis AMNB um den Durchmesser AB, so beschreibt der Bogen MN die Mantelfläche einer Kugelzone, deren Grundflächen die Halbmesser NQ und MP haben, und deren Höhe PQ ist. Diese Mantelfläche ist offenbar die Summe aus den Mantelflächen, welche von den Bögen MC, CD, DE, . . . während des Herumdrehens beschrieben werden. Je kleiner nun diese Bögen sind, um so mehr nähern sich die von ihnen beschriebenen Flächen den Mantelflächen von abgekürzten der Kugel umschriebenen Kegeln, und fallen mit ihnen zusammen, wenn jene Bögen unendlich klein sind, d. i. wenn der Bogen MN in unendlich viele Theile getheilt wird. Die Mantelfläche eines solchen Kegelstutzes aber ist gleich dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multiplizirt mit der Höhe des Kegelstutzes; es ist daher, wenn die Periferie eines größten Kreises der Kugel durch p ausgedrückt wird,

die von MC beschriebene Fläche = p.PF,
" " CD " " = p.FG,
" " DE " " = p.GH,
u. s. w.

Addirt man alle diese Flächen, so bekommt man die krumme Oberfläche der von dem Bogen MN beschriebenen Kugelzone; diese ist also gleich

$$p(PF + FG + GH + \ldots) = p.PQ,$$

w. z. b. w.

Denkt man sich eben so den Halbkreis AMB, durch dessen Umdrehung die Oberfläche o der ganzen Kugel beschrieben wird, in unendlich viele Theile getheilt, so gelangt man durch dieselben Schlüsse zu dem Resultate

$$o = p.AB,$$

d. h. die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Umfange eines größten Kreises multiplizirt mit dem Durchmesser.

Heißt r der Halbmesser der Kugel, so ist $p = 2r\pi$ und $AB = 2r$, daher $o = 4r^2\pi$; aber $r^2\pi$ bedeutet den Flächeninhalt eines größten Kreises, daher kann man auch sagen:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalte eines größten Kreises.

Aus $o = 4r^2\pi$ folgt $r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$, mittelst welcher Formel man aus der Oberfläche einer Kugel ihren Halbmesser bestimmen kann.

Heißen O und o die Oberflächen zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$O = 4R^2\pi \quad \text{und} \quad o = 4r^2\pi,$$
$$\text{daher} \quad O : o = R^2 : r^2,$$

d. h. die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Beispiele.

§. 172.

1) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 1′ 6″ ist?
   $O = 4.18^2.3{\cdot}1416 = 4071{\cdot}5 \square'' = 28 \square' \; 39{\cdot}5 \square''$.
2) Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man dieselbe als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 859·0909 geographische Meilen beträgt?
   $O = 4.859{\cdot}0909^2.3{\cdot}141593 = 9274537 \square$ Meilen.
3) Eine Kuppel, welche die Form einer Halbkugel hat, soll mit Kupferblech gedeckt werden; wie viel Blech ist dazu erforderlich, wenn der Durchmesser der Kugel 4° 3′ ist? — 1145·12 □′ Kupferblech.
4) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 20 □′; wie groß ist der Halbmesser?
   $$4\pi = 12{\cdot}566; \quad \frac{O}{4\pi} = 1{\cdot}591;$$
   $$r = \sqrt{1{\cdot}591} = 1{\cdot}261' = 1' \; 3{\cdot}132''.$$
5) Ein zilindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist 3′ weit und 21′ lang, so daß die Länge des Zilinders 18′ beträgt; wie groß ist die Oberfläche?

Mantelfläche des Zilinders = 169·646 □′
Oberfläche der Endstücke (Kugel) = 28·274 „
Ganze Oberfläche = 197·92 □′.

7. Uebungsaufgaben.

A. Lehrsätze

§. 173.

1. Zieht man in einem regulären Vielecke von gerader Seitenzahl durch zwei gegenüberstehende Eckpunkte eine Gerade, und drehet um diese das halbe Vieleck herum, so ist die dadurch erzeugte Umdrehungsfläche gleich dem Produkte aus der Periferie des eingeschriebenen Kreises in die Umdrehungsaxe.
2. Wenn in einen gleichseitigen Zilinder eine Kugel beschrieben wird, so verhalten sich die Oberflächen dieser zwei Körper wie 3 : 2.
3. Eine Kugelmütze ist einem Kreise gleich, welche die Sehne des halben erzeugenden Kreisabschnittes zum Halbmesser hat.
4. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem Halbmesser der Kugel multiplizirt mit der Länge eines größten Kreisbogens, der so viel Grade hat, als der Ueberschuß der Grade aller drei sphärischen Winkel über 180° beträgt.

B. Aufgaben.

§. 174.

1. In einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide ist a eine Seite der Grundfläche und s eine Seitenkante; man bestimme die Oberfläche.
2. Die Oberfläche eines hohlen senkrechten Zilinders zu berechnen, wenn der Halbmesser R des ganzen Zilinders, der Halbmesser r des ausgeschnittenen Zilinders und die Höhe h gegeben sind.
3. Den Halbmesser eines Kreises zu finden, der so groß ist, als
   a) die Mantelfläche eines gegebenen geraden Zilinders,
   b) die Mantelfläche eines gegebenen geraden Kegels.
4. Die Höhe des geraden Kegels zu bestimmen, dessen Mantelfläche dem Mantel des umschriebenen geraden Zilinders gleich ist.
5. Die Höhe des abgekürzten geraden Kegels zu bestimmen, dessen Mantelfläche dem Mantel des umschriebenen geraden Zilinders gleich ist.
6. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche so groß ist, als
   a) die Oberfläche eines gegebenen geraden Zilinders,
   b) die Oberfläche eines gegebenen geraden Kegels.
7. Wie muß ein gegebener gerader Kegel abgestutzt werden, damit die Oberfläche des Stutzes gleich werde der Oberfläche einer gegebenen Kugel?

III. Kubikinhalt der Körper.

1. Gleichheit der Körper.

Lehrsätze.

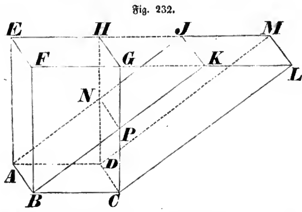
§. 175.

1. Zwei Parallelepipede sind gleich, wenn sie dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Wenn zwei Parallelepipede auf derselben Grundfläche aufstehen und gleiche Höhe haben, so müssen die obern Grundflächen nothwendig in einer und derselben Ebene liegen. Im Beweise selbst sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn die obern Grundflächen zwischen denselben Parallelen EM und FL liegen (Fig. 232).

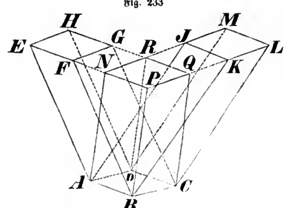
Fig. 232.



Der Körper AEJBFK ist ein dreiseitiges Prisma, weil seine Grundflächen AEJ und BFK parallel liegen, und auch die Seitenkanten AB, EF und JK parallel sind. Eben so ist der Körper DHMCGL ein dreiseitiges Prisma. Diese beiden Prismen sind nun kongruent, da die Körperwinkel bei F und G von drei in derselben Ordnung kongruenten Ebenen eingeschlossen werden. Nimmt man von beiden Prismen den Körper NHJPGK hinweg, so müssen auch die Reste, nämlich die Körper AEHNBFGP und DNJMCPKL gleich sein; und addirt man zu diesen beiden den Körper ADNBCP, so müssen auch die Summen, nämlich die Parallelepipede AG und AL gleich sein.

b) Wenn die obern Grundflächen nicht zwischen denselben Parallelen liegen, wie in den Parallelepipeden AG und AL (Fig. 233).

Fig. 233



Verlängert man die Seiten EF und HG, und eben so die Seiten MJ und LK, so müssen sich dieselben, da sie in einerlei Ebene liegen, in den Punkten N, P, Q, R schneiden. Die Figur NPQR ist nun, wie sich leicht zeigen läßt, ein Parallelogramm, und mit ABCD kongruent; legt man daher durch je zwei gleichliegende Seiten der beiden Parallelogramme Ebenen, so erhält man das Parallelepiped AQ. Das Parallelepiped AG ist nun dem Parallelepiped AQ gleich weil beide dieselbe Basis AC haben, und ihre obern Grundflächen EG und NQ zwischen denselben Parallelen EP und HQ liegen; aus gleichem Grunde ist auch das Parallelepiped AL =AQ; daher sind die Parallelepipede AG und AL auch unter einander gleich.

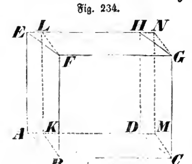
Aus dem hier bewiesenen Satze folgt auch:

a) Zwei Parallelepipede, welche kongruente Grundflächen und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

b) Jedes schiefe Parallelepiped ist gleich einem geraden, das mit ihm dieselbe Basis und gleiche Höhe hat.

§. 176.

Fig. 234.



2. Jedes gerade nicht rechtwinklige Parallelepiped ist gleich einem rechtwinkligen, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Es sei BH (Fig. 234) ein gerades Parallelepiped, dessen Basis ABCD ein schiefwinkliges Parallelogramm ist. Man lege durch die Kanten BF und CG Ebenen, welche auf der Ebene ADHE senkrecht stehen, so

ist BN ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches mit dem gegebenen geraden Parallelepiped BH gleiche Höhe und auch gleiche Grundfläche hat, da das Rechteck MB dem schiefwinkligen Parallelogramme BD gleich ist. Betrachtet man nun in den beiden Parallelepipeden BH und BN das Rechteck BCGF als die gemeinschaftliche Grundfläche, so erscheinen die obern Grundflächen ADHE und KMNL zwischen denselben Parallelen AM und EN, somit sind die beiden Parallelepipede einander gleich.

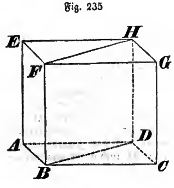
Daraus folgt auch:

Jedes schiefe Parallelepiped ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

8. Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt halbirt.

a) Es sei das Parallelepiped AG (Fig. 235) ein gerades.

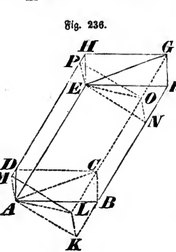
Fig. 235



Durch den Diagonaldurchschnitt BDHF werden die Parallelogramme AC und EG in kongruente Dreiecke getheilt. Die beiden dreiseitigen Prismen ABDEFH und BCDFGH haben nun zwei Körperwinkel A und C, welche von drei in derselben Ordnung kongruenten Ebenen ABD, AF, AH und BCD, CH, CF eingeschlossen werden; die zwei Prismen sind demnach kongruent, und daher das Parallelepiped AG durch den Diagonaldurchschnitt halbirt.

b) Es sei das Parallelepiped AG (Fig. 236) ein schiefes.

Fig. 236.



Legt man durch die Punkte A und E zwei Ebenen, welche auf den Kanten des Parallelepipeds AG senkrecht stehen, so ist der Körper AKLMENOP ein gerades Parallelepiped, welches durch den Diagonaldurchschnitt AEOL in zwei gleiche Prismen ALMEOP und AKLENO getheilt wird.

Da $DH = MP = AE$ ist, so muß auch $DH - DP = MP - DP$ oder $PH = MD$ sein; eben so folgt $OG = LC$. Denkt man sich nun den Körper EOPHG so auf den Körper ALMDC gelegt, daß die kongruenten Dreiecke EOP und ALM zusammenfallen, so muß auch PH in der Richtung MD,

und wegen PH = MD der Punkt H auf D fallen; eben so folgt, daß der Punkt G auf C zu liegen kommen müsse; es ist daher der Körper EOPHG ≅ ALMDC. Setzt man zu beiden den Körper ACDEOP dazu, so müssen auch die Summen gleich sein, nämlich das Prisma ACDEGH = ALMEOP. Eben so kann man beweisen, daß das Prisma ABCEFG = AKLENO sein müsse.

Da nun die Prismen ALMEOP und AKLENO gleich sind, so müssen auch die Prismen ACDEGH und ABCEFG gleich sein; somit wird das schiefe Parallelepiped AG durch den Diagonaldurchschnitt AEGC halbirt.

Aus dem hier bewiesenen Satze folgt:

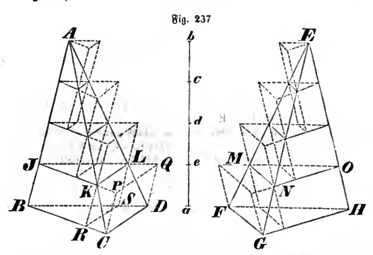
a) Jedes dreiseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds, das mit ihm gleiche Höhe und eine doppelt so große Basis hat.

b) Zwei dreiseitige Prismen, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

§. 177.

4. Zwei dreiseitige Pyramiden, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind einander gleich

Fig. 237



Es seien (Fig. 237) die Grundflächen BCD und FGH der beiden Pyramiden ABCD und EFGH gleich und in einerlei Ebene gelegen; ab sei die gemeinschaftliche Höhe der Pyramiden.

Theilt man ab in mehrere gleiche Theile, und legt durch die Theilungspunkte c, d, e mit den Grundflächen parallele Ebenen, so schneidet jede solche Ebene die beiden Pyramiden in zwei gleichen Dreiecken. So ist z. B. das △ JKL = MNO; denn

$JKL : BCD = be^2 : ab^2$, und $MNO : FGH = be^2 : ab^2$,
daher auch $JKL : BCD = MNO : FGH$.

Nun ist $\triangle\ BCD = FGH$, folglich auch $\triangle\ JKL = MNO$.

Auch sieht man, daß durch jene Durchschnittsebenen die zwei Pyramiden in mehrere Pyramidalstücke zerlegt werden. Wird zwischen den beiden Grundflächen eines solchen Pyramidalstückes BCDJKL ein Prisma BCDJPQ konstruirt, welches die untere Grundfläche BCD zur Basis hat, so heißt dieses Prisma dem Pyramidalstücke umschrieben. Beschreibt man aber zwischen den beiden Grundflächen über der kleinern JKL ein Prisma BRSJKL, so hat man ein jenem Pyramidalstücke eingeschriebenes Prisma.

Konstruirt man auf diese Weise zu allen Pyramidalstücken die umschriebenen und eingeschriebenen Prismen, so läßt sich in Hinsicht derselben Folgendes behaupten:

a) Das unterste umschriebene Prisma ist in beiden Pyramiden gleich groß, weil zwei dreiseitige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe denselben Körperraum einschließen. Aus demselben Grunde ist jedes nächstfolgende Paar von umschriebenen Prismen gleich. Es wird daher auch die Summe aller umschriebenen Prismen in beiden Pyramiden gleich sein; diese Summe heiße U.

b) Dasselbe gilt in Bezug auf die eingeschriebenen Prismen; die Summe derselben, die durch E ausgedrückt werden soll, muß in beiden Pyramiden gleich groß ausfallen.

c) Heißt P_1 die Pyramide ABCD, und P_2 die Pyramide EFGH, so ist, in wie viele gleiche Theile auch die Höhe ab eingetheilt werden mag, stets:

$$U > P_1 > E, \text{ und } U > P_2 > E$$

Subtrahirt man die Ausdrücke $P_1 < U$ und $P_2 > E$, so erhält man $P_1 - P_2 < U - E$

d) Da jedes umschriebene Prisma dem nächst untern eingeschriebenen Prisma gleich ist, so ist die Differenz $U - E$ gleich dem untersten umschriebenen Prisma BCDJPQ, welches der Kürze halber p heißen mag; daher ist

$$P_1 - P_2 < p.$$

In je mehrere Theile die Höhe ab getheilt wird, desto kleiner ist p; da sich nun die Höhe in beliebig viele Theile theilen läßt, so kann das Prisma p kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine denkbare Größe. Aber so klein auch p werden mag, so ist die unveränderliche Differenz $P_1 - P_2$ stets noch kleiner; was nur Statt finden kann, wenn $P_1 - P_2 = 0$, oder $P_1 = P_2$ ist.

§. 178.

5. Jedes dreiseitige Prisma kann in drei gleiche Pyramiden zerlegt werden.

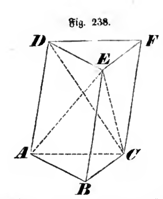


Fig. 238.

Legt man (Fig. 238) durch die Punkte A, E und C des dreiseitigen Prisma ABCDEF eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in zwei Pyramiden, eine dreiseitige EABC und eine vierseitige EACFD. Wird ferner in dieser vierseitigen Pyramide durch die Punkte C, E und D eine Ebene gelegt, so schneidet sie jene Pyramide in die zwei dreiseitigen Pyramiden EACD und ECDF.

Die beiden Pyramiden EACD und ECDF sind nun einander gleich, weil sie einen gemeinschaftlichen Scheitel E und daher gleiche Höhe haben, und auch die Grundflächen ACD und CDF als Hälften des Parallelogramms ACFD gleich sind.

Betrachtet man in der Pyramide ECDF den Punkt C als Scheitel und DEF als Grundfläche, und vergleicht dann dieselbe mit der Pyramide EABC, deren Scheitel E und die Grundfläche ABC ist, so sieht man, daß beide Pyramiden gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, daß sie somit selbst gleich sind.

Die drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF, in welche das dreiseitige Prisma ABCDEF zerlegt wird, sind also unter einander gleich.

Da EABC eine Pyramide vorstellt, welche mit dem Prisma ABCDEF gleiche Basis und gleiche Höhe hat, und da EABC $= \frac{1}{3}$ABCDEF ist, so kann man sagen: Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

§. 179.

6. Ein abgekürztes dreiseitiges Prisma ist gleich drei Pyramiden, deren gemeinschaftliche Grundfläche die Basis des Prisma ist, und deren Scheitel die Winkelpunkte des schiefen Durchschnittes sind.

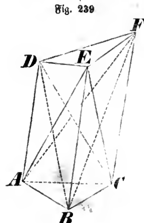


Fig. 239

Es sei ABCDEF (Fig. 239) ein abgekürztes Prisma. Legt man durch die Punkte A, E, C eine Ebene, ferner durch C, E, D eine zweite Ebene, so zerfällt dasselbe in drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF; es ist also ABCDEF = EABC + EACD + ECDF

Die Pyramide EABC hat ABC zur Grundfläche, und ihren Scheitel in E.

Zieht man die Gerade BD, so entsteht die Pyramide BACD, welche mit EACD gleich ist, da beide Pyramiden auf derselben Basis ACD aufstehen, und ihre Scheitel B und E in der zur Basis parallelen Geraden BE liegen, somit beiden dieselbe Höhe zukommt. EACD ist also gleich der

Pyramide BACD, in welcher man auch BAC als Grundfläche und D als Scheitel betrachten kann.

Zieht man ferner AF und BF, so folgt auf gleiche Weise, daß die Pyramide ECDF gleich ist der Pyramide BACF, in welcher man BAC als Basis und F als Scheitel ansehen kann.

Es ist somit

$$ABCDEF = EABC + DABC + FABC.$$

2. Berechnung des Körperinhaltes.

§. 180.

Um den Kubikinhalt eines Körpers zu finden, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Maß an, und untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Körper in dem gegebenen enthalten ist.

Als Einheit des Körpermaßes wird ein Kubus angenommen, welcher Kubikzoll (Kub.''), Kubikfuß (Kub.'), . . Kubikmeile heißt, je nachdem eine Seite desselben einen Zoll, Fuß, . . eine Meile beträgt.

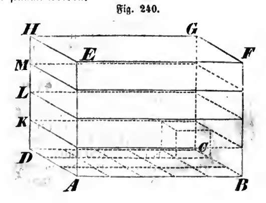
Dem Begriffe des Messens zu Folge sollte man, um den Inhalt eines Körpers zu bestimmen, darin eine Kubikklafter, einen Kubikfuß, . . so oft neben und über einander legen, als es möglich ist. Dieses weitläufige und in den seltensten Fällen ausführbare Verfahren wird übrigens in der Wirklichkeit so wenig angewendet, als man den Flächeninhalt durch wirkliches Auftragen der Flächenmaße sucht; es lassen sich nämlich Sätze ableiten, nach denen der kubische Inhalt aus dem Maße der Linien oder Flächen, von denen die Größe des Körpers abhängt, durch Rechnung gefunden werden kann.

a) Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds und eines Würfels.

§. 181.

Es soll (Fig. 240) der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, worin die Länge AB = 5', die Breite AD = 3', und die Höhe AE = 4' ist, bestimmt werden.

Fig. 240.



Weil die Grundfläche ABCD $5 \times 3 = 15 \square'$ enthält, so läßt sich darauf ein Kubikfuß 15mal auftragen; das Parallelepiped enthält also bis zu einer Höhe von 1' eine Schichte von 15 Kubikfuß; zu der Höhe KL gehört eine neue Schichte von 15 Kubikfuß, eben so zu der Höhe LM, MH; das ganze Parallelepiped hat daher $15 \times 4 = 5 \times 3 \times 4 =$ 60 Kubikfuß.

Allgemein lassen sich auf der Grundfläche jedesmal so viele Würfel aufstellen, als dieselbe Quadrate, oder als das Produkt aus der Länge und Breite Einheiten enthält; und es erscheinen so viele solcher Schichten von Würfeln über einander, als die Höhe Einheiten enthalt. Man muß daher, um den Körperinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu erhalten, die Länge, Breite und Höhe mit einander, oder was gleichviel ist, die Grundfläche mit der Höhe multipliziren. Daraus folgt:

Der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus der Länge, Breite und Höhe, oder dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe.

Die Benennung des kubischen Inhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; sind diese in Klafter ausgedrückt, so bedeutet die Zahl, welche den Körperinhalt anzeigt, Kubikklafter; u. s. w.

§. 182.

Ein Würfel kann als ein rechtwinkliges Parallelepiped, worin Länge, Breite und Höhe einander gleich sind, betrachtet werden; daher ist der Kubikinhalt eines Würfels gleich einer Seite, dreimal als Faktor gesetzt, oder zur dritten Potenz erhoben.

Heißt K der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Seite S ist, so hat man $K = S^3$.

Aus diesem folgt:

1 Kub.° $=$ $6^3 = 216$ Kub.',
1 Kub.' $=$ $12^3 = 1728$ Kub.'',
1 Kub.'' $=$ $12^3 = 1728$ Kub.''';
1 Kub Meile $= 4000^3 = 64000000000$ Kub.°

Wenn man umgekehrt aus dem kubischen Inhalte eines Würfels die Länge einer Seite finden will, so darf man nur jene Zahl suchen, welche dreimal als Faktor gesetzt den Kubikinhalt gibt, d. h. man braucht nur aus dem gegebenen Kubikinhalte die Kubikwurzel auszuziehen.

§. 183.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, in welchem die Länge $= 4' 6''$, die Breite $= 3' 5''$ und die Höhe $= 2' 8''$ ist?

Länge $= 4' 6'' = 54''$ $\quad 54 \times 41 \times 32 = 70848$ Kub.''
Breite $= 3' 5'' = 41''$ $\quad = 41$ Kub.'
Höhe $= 2' 8'' = 32''$

2) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Getreidekastens, bei welchem die Länge 1°, die Breite 4′ 3″ und die Höhe 4′ 6″ beträgt; und wie viel Getreide kann er aufnehmen, wenn ein Metzen 3365 Kub.″ enthält?

Länge = 1° = 72″ $72 \times 51 \times 54 = 198288$ Kub.″
Breite = 4′3″ = 51″ $198288 : 3365 = 58{\cdot}9$, also nahe
Höhe = 4′6″ = 54″ 59 Metzen.

3) Wie viel beträgt der Körperinhalt eines Würfels, dessen jede Seite = 1° 3′ 3″ ist?

Seite = 1° 3′ 3″ = 111″; $111^3 = 1367631$ Kub.″
= 3 Kub.° 143 Kub.′ 783 Kub.″

4) Wie lang ist die Seite eines Würfels, dessen Kubikinhalt 12 Kub.′ 1216 Kub.″ beträgt?

12 Kub.′ 1216 Kub.″ = 21952 Kub.″
$\sqrt[3]{21952} = 28'' = 2'\ 4''$ Seite.

b) Kubikinhalt irgend eines Prisma.

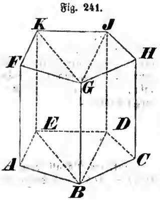
§. 184.

1. Da jedes gerade oder schiefe Parallelepiped einem rechtwinkligen, das mit ihm gleiche Basis und Höhe hat, gleich ist, so folgt:

Der Körperinhalt eines jeden Parallelepipeds ist gleich der Grundfläche multiplizirt mit der Höhe.

2. Jedes dreiseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds von doppelt so großer Basis und gleicher Höhe; daher ist der Körperinhalt eines dreiseitigen Prisma gleich der halben Grundfläche des Parallelepipeds, d. i. seiner eigenen Grundfläche, multiplizirt mit der Höhe.

Fig. 241.



3) Jedes mehrseitige Prisma ABCDEFGHJK (Fig. 241) läßt sich durch Diagonaldurchschnitte in lauter dreiseitige Prismen zerlegen.

Heißt nun h die Höhe des mehrseitigen Prisma, so ist

Prisma ABEFGK = △ ABE . h,
" BDEGJK = △ BDE . h,
" BCDGHJ = △ BCD . h;

daher durch Addizion

ABEFGK + BDEGJK + BCDGHJ
= (ABE + BDE + BCD) . h

oder

ABCDEFGHJK = ABCDE . h;

d. h. der Kubikinhalt irgend eines Prisma ist gleich der Grundfläche, multiplizirt mit der Höhe.

Beispiele.

1) Die Basis eines Prism ist 3□′ 65□″, die Höhe 1′ 8″; wie groß ist der Körperinhalt?

Basis = 3□′ 65□″ = 497□′
Höhe = 1′ 8″ = 20″
Kubikinhalt = 497 × 20 = 9940 Kub.″
= 5 Kub.′ 1300 Kub.″

2) Wie groß ist der Körperinhalt eines geraden Prisma, dessen Höhe 3° beträgt, und dessen Basis ein regelmäßiges Sechseck ist, worin eine Seite 8″ Länge hat?

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes, dessen jede Seite 8″ beträgt, ist 166·32□″; daher
Kubikinhalt des Prisma = 166·32 × 216 = 35922 Kub.″
= 20 Kub.′ 1362 Kub.″

c) Kubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidalstutzes.

§. 185.

1. Da eine dreiseitige Pyramide der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so folgt:

Der Körperinhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich der Grundfläche, multiplizirt mit dem dritten Theile der Höhe.

2. Jede mehrseitige Pyramide OABCDE (Fig. 242) läßt sich, wenn man durch den Scheitel und die Diagonalen der Grundfläche Ebenen legt, in lauter dreiseitige Pyramiden zerfallen.

Fig. 242.

Heißt nun h die Höhe der mehrseitigen Pyramide, so ist

$$\text{Pyramide } OABE = ABE \cdot \frac{h}{3},$$
$$\text{,, } \quad OBDE = BDE \cdot \frac{h}{3},$$
$$\text{,, } \quad OBCD = BCD \cdot \frac{h}{3};$$

daher durch Addizion

$$OABE + OBDE + OBCD = (ABE + BDE + BCD) \cdot \frac{h}{3}$$

oder

$$OABCDE = ABCDE \cdot \frac{h}{3},$$

d. h. **der Kubikinhalt irgend einer Pyramide ist gleich der Grundfläche, multiplizirt mit dem dritten Theil der Höhe.**

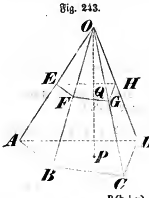
§. 186.

3. Um den Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide zu finden, bestimme man die Körperinhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied

der Pyramidalstutz ist, und ziehe den Inhalt der kleinern Pyramide von jenem der größern ab.

Sind (Fig. 243) die beiden Grundflächen ABCD = B und EFGH = b, und die Höhe h des Pyramidalstutzes gegeben, so läßt sich der Kubikinhalt K desselben auf folgende Art bestimmen:

Fig. 243.



Man erweitere die Seitenflächen des Pyramidalstutzes, bis sie im Punkte O zusammentreffen, und es ist

K = Pyr. OABCD — Pyr. OEFGH.

Zieht man von O auf ABCD die Senkrechte OP, welche auch auf EFGH senkrecht sein muß, so hat man PQ = h, und wenn OQ = x gesetzt wird, OP = h + x. Es ist nun

$$\text{Pyr. OABCD} = \frac{B(h+x)}{3} \text{ und}$$

$$\text{Pyr. OEFGH} = \frac{bx}{3}, \text{ daher}$$

$$K = \frac{B(h+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Bh}{3} + \frac{x}{3}(B-b).$$

Zur Bestimmung von x hat man die Proporzion:

$$B : b = (h+x)^2 : x^2 \text{ oder } \sqrt{B} : \sqrt{b} = (h+x) : x.$$

Daraus folgt $(\sqrt{B}-\sqrt{b}):\sqrt{b} = h:x$, und somit $x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$.

Durch Substituzion dieses Werthes erhält man sofort

$$K = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}(B-b) = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B}+\sqrt{b})$$

$$= \frac{Bh}{3} + \frac{\sqrt{Bb}\,.\,h}{3} + \frac{bh}{3} = (B + \sqrt{Bb} + b)\,.\,\frac{h}{3}.$$

Der Ausdruck $K = B\,.\,\frac{h}{3} + \sqrt{Bb}\,.\,\frac{h}{3} + b\,.\,\frac{h}{3}$ gibt den Satz:

Eine abgekürzte Pyramide ist gleich drei Pyramiden, die mit der abgekürzten gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen der abgekürzten Pyramide und die zwischen ihnen mittlere geometrische Proporzionale sind.

§. 187.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt einer Pyramide, deren Basis 3□' 72□'', und deren Höhe 5'3'' ist?

Basis = 3□'72□'' = 504□''
Höhe = 5' 3'' = 63''
Körperinhalt = 504 × 21 = 10584 Kub.''
= 6 Kub.' 216 Kub ''

2) In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist jede Seite der Basis 3′ 4″, und jede Seitenkante 7′ 3″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Basis $= 40^2 = 1600 \square''$

Diagonale der Basis $= \sqrt{40^2 + 40^2} = 56{\cdot}57''$

Höhe der Pyramide $= \sqrt{87^2 - 28{\cdot}285^2} = 82{\cdot}2737''$

Körperinhalt $= 1600 \times 27{\cdot}4246 = 43879{\cdot}36$ Kub.′
$= 25$ Kub.′ 679 Kub.″

3) In einem Pyramidalstutz ist die Höhe 5′, die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren Seiten 1′ 6″ und 1′ 2″ betragen; wie groß ist der Kubikinhalt?

Untere Basis $= 140{\cdot}22 \square''$
Obere „ $= 84{\cdot}84$ „
Mittlere Proporzionale $= 109{\cdot}07$ „
$334{\cdot}13 \square''$

Körperinhalt $= 334{\cdot}13 \times 20 = 6682{\cdot}6$ Kub.″
$= 3$ Kub.′ 1599 Kub.″

d) Kubikinhalt eines Zilinders.

§. 188.

Ein Zilinder kann als ein Prisma, dessen Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden; daher gilt der Satz:

Der Kubikinhalt eines Zilinders ist gleich der Grundfläche, multiplizirt mit der Höhe.

Heißt h die Höhe und r der Halbmesser der Basis, so ist der Körperinhalt $k = r^2 h \pi$.

Für den gleichseitigen Zilinder, wo $h = 2r$ ist, hat man $k = 2r^3 \pi$.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt eines Zilinders, dessen Grundfläche 2′ 4″ zum Halbmesser hat und dessen Höhe 1′ 2″ ist?

Basis $= 28^2 . 3{\cdot}1416 = 2463{\cdot}0144 \square''$

Kubikinhalt $= 2463{\cdot}0144 \times 14 = 34482$ Kub.″
$= 19$ Kub.′ 1650 Kub.″

2) Der Durchmesser eines gleichseitigen Zilinders ist 1′ 4″; wie groß ist der Körperinhalt?

Grundfläche $= 8^2 . 3{\cdot}1416 = 201{\cdot}0624 \square''$

Körperinhalt $= 201{\cdot}0624 \times 16 = 3216{\cdot}9984$ Kub.″
$= 1$ Kub.′ 1488 Kub.″

3) Eine zilindrische Röhre ist 3′ lang, die Weite im Lichten 1′, die Dicke 1″; wie viel beträgt der Kubikinhalt?

Für den großen Zilinder ist
die Basis $= 7^2 . 3{\cdot}14 = 153{\cdot}86 \square''$
der Kubikinhalt $= 153{\cdot}86 \times 36 = 5539$ Kub.″

Für den kleinen Zilinder hat man
Basis $= 6^2 . 3{\cdot}14 = 113{\cdot}04 \square''$
Kubikinhalt $= 113{\cdot}04 \times 36 = 4069$ Kub.″

daher Kubikinhalt der zilindrischen Röhre $= 1470$ Kub.″

e) Kubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstutzes.

§. 189.

1) Der Kegel kann als eine Pyramide, deren Basis ein Kreis ist, angesehen werden.

Der Körperinhalt eines Kegels wird daher gefunden, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

Heißt h die Höhe und r der Halbmesser der Basis, so ist der Körperinhalt $k = \frac{r^2 h \pi}{3}$.

Ist der Kegel ein gerader und heißt s eine Seite desselben, so ist

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}, \text{ daher } k = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, folglich $h = r\sqrt{3}$, und

$$k = \frac{r^3 \pi}{3} \sqrt{3}.$$

2) Den abgekürzten Kegel kann man als eine abgekürzte Pyramide, deren Grundflächen Kreise sind, betrachten. Daraus folgt:

Der Körperinhalt eines abgekürzten Kegels ist gleich den Inhalten dreier Kegel, die mit dem abgekürzten gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen des Kegelstutzes und ihre mittlere Proporzionale sind.

Heißen B und b die Grundflächen des Kegelstutzes, und h seine Höhe, so ist der Körperinhalt

$$K = B \cdot \frac{h}{3} + b \cdot \frac{h}{3} + \sqrt{Bb} \cdot \frac{h}{3} = (B + b + \sqrt{Bb}) \cdot \frac{h}{3}.$$

Sind nun R und r die Halbmesser der Grundflächen B und b, so ist

$$B = R^2 \pi, \quad b = r^2 \pi, \quad \sqrt{Bb} = R r \pi;$$

daher

$$K = (R^2 + r^2 + R r) \cdot \frac{h \pi}{3}.$$

Beispiele.

1) Die Basis eines Kegels hat 1′ 3″ zum Halbmesser, die Höhe ist 1′ 9″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Basis $= 15^2 \cdot 3{\cdot}1416 = 706{\cdot}86$ □″

Kubikinhalt $= 706{\cdot}86 \times 7 = 4948{\cdot}02$ Kub.″

$= 2$ Kub.′ 1492 Kub.″

2) Wie groß ist der Körperinhalt eines geraden Kegels, dessen Seite 1° betragt, und dessen Basis 4′ zum Durchmesser hat?

Basis $= 2^2 \cdot 3{\cdot}1416 = 12{\cdot}5664$ □′

Höhe $= \sqrt{6^2 - 2^2} = 5{\cdot}6569'$

Kubikinhalt $= 12{\cdot}5664 \times 1{\cdot}8856 = 23{\cdot}6951$ Kub.′

$= 23$ Kub.′ 1201 Kub.″

3) Es sei 2′ 8″ die Seite eines gleichseitigen Kegels; man bestimme den Kubikinhalt.

Basis $= 16^2 . 3{\cdot}1416 = 804{\cdot}2496 \,\square''$
Höhe $= 16\sqrt{3} = 27{\cdot}7128''$
Kubikinhalt $= 804{\cdot}2496 \times 9{\cdot}2376 = 7429{\cdot}33$ Kub.''
$= 4$ Kub.' 517 Kub.''

4) Es ist der Kubikinhalt eines 3' 6'' hohen Kegelstutzes zu berechnen, dessen untere Basis 2' 1'', und die obere Basis 1' 8'' zum Halbmesser hat.

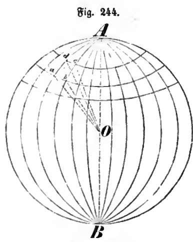
$R^2 = 625$ $(R^2 + r^2 + Rr)\pi = 4790{\cdot}92475 \,\square''$
$r^2 = 400$ Kubikinhalt $= 4790{\cdot}92475 \times 14$
$Rr = 500$ $= 67072{\cdot}9465$ Kub.'' $= 38$ K.' 1409 K.''
$\overline{1525}$

f) Kubikinhalt einer Kugel.

§. 190.

Es sei AB (Fig. 244) ein Durchmesser und O der Mittelpunkt der Kugel. Denkt man sich nun durch AB sehr viele Ebenen gelegt, welche

Fig. 244.



die Kugeloberfläche in größten Kreisen schneiden, und ferner senkrecht auf AB mehrere Ebenen geführt, welche die Oberfläche in parallel laufenden Kreisen durchschneiden, so zerfällt dadurch die ganze Oberfläche in lauter Drei- und Vierecke, welche man als eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Schnitte unendlich groß angenommen wird. Zieht man nun zu allen Durchschnittspunkten der Oberfläche Halbmesser, und denkt sich durch dieselben Ebenen gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, welche alle ihre Basis an der Kugeloberfläche, und ihren Scheitel im Mittelpunkte haben, so daß der Halbmesser der Kugel ihre gemeinschaftliche Höhe vorstellt; eine solche Pyramide ist z. B. Oabcd. Der Kubikinhalt einer Pyramide aber wird gefunden, wenn man

die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt; daher ist der Körperinhalt aller jener Pyramiden zusammengenommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multiplizirt mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe, d. i. des Halbmessers.

Der Kubikinhalt einer Kugel ist also gleich der Oberfläche, multiplizirt mit dem dritten Theile des Halbmessers.

Heißt r der Halbmesser der Kugel, so ist die Oberfläche $o = 4r^2\pi$ daher der Körperinhalt

$$k = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Aus $k = \frac{4r^3\pi}{3}$ folgt $r = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}$, mittelst welcher Formel man aus dem gegebenen Körperinhalte der Kugel den Halbmesser berechnen kann.

Heißen K und k die Inhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$K = \frac{4R^3\pi}{3} \quad \text{und} \quad k = \frac{4r^3\pi}{3},$$

daher $$K : k = R^3 : r^3,$$

d. h. die Körperinhalte zweier Kugeln verhalten sich so wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser 3 6″ ist?

$$0 = 4.42^2.3\cdot14159 = 22167\cdot05904 \square''$$
$$k = 22167\cdot05904 \times 14 = 310339 \text{ Kub.}''$$
$$= 179 \text{ Kub.}' \; 1027 \text{ Kub.}''$$

2) Man bestimme den Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser 3′ 8″ beträgt.

$$0 = 4 \,.\, 22^2.\, 3\cdot1416 = 6082\cdot1376 \square''$$
$$k = 6082\cdot1376 \,.\, 7\tfrac{1}{3} = 44602 \text{ Kub.}''$$
$$= 25 \text{ Kub.}' \; 1402 \text{ Kub.}''$$

3) Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Kubikinhalt 48 Kub.″ beträgt?

$$\frac{3k}{4\pi} = 11\cdot459153,$$
$$r = \sqrt[3]{11\cdot459153} = 2\cdot26''.$$

4) Ein Dampfkessel ist 3′ weit, der Zilinder ist 18′ 6″ lang und hat zu beiden Seiten zwei halbkugelförmige Endstücke; man suche den Körperinhalt.

Kubikinhalt des Zilinders = 225969 Kub.″
Inhalt der Endstücke (Kugel) = 24429 „
Kubikinhalt des Kessels = 250398 Kub.″
= 144 Kub.′ 1566 Kub.″

3. Uebungsaufgaben.

A. Lehrsätze.

§. 191.

1. Der Körperinhalt eines regulären Polyëders ist gleich der Oberfläche desselben multiplizirt mit dem dritten Theile des Abstandes einer Seitenfläche vom Mittelpunkte.
2. Wenn man in einem regulären Polygone von gerader Seitenanzahl zwei gegenüberstehende Eckpunkte durch eine Gerade verbindet, und um diese letztere das halbe Polygon herumdrehet, so ist der Inhalt des dadurch beschriebenen Körpers gleich der doppelten Fläche des eingeschriebenen Kreises multiplizirt mit dem dritten Theile der Umdrehungsaxe.
3. Der Körperinhalt eines Kugelsektors ist so groß als der Körperinhalt eines Kegels, welcher die Oberfläche der Kugelmütze zur Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat.
4. Der Körperinhalt eines Kugelsegments ist gleich dem Inhalte eines Zilinders, der die Höhe der Kugelmütze zum Halbmesser und den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat, weniger dem Inhalte eines Kegels, dessen Höhe und Halbmesser der Basis die Höhe der Kugelmütze ist.
5. Wenn man einem gleichseitigen Zilinder eine Kugel und einen Kegel einschreibt, so verhalten sich die Inhalte dieser drei Körper wie 3 : 2 : 1.

B. Aufgaben.

§. 192.

1. Den Kubikinhalt eines Tetraëders, dessen Seite a ist, zu finden.
2. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der Oberfläche eines Würfels; welcher Körper hat einen größern kubischen Inhalt?
3. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Kubikinhalt so groß ist als
   a) der Inhalt eines gegebenen Zilinders,
   b) der Inhalt eines gegebenen Kegels.
4. Ein gerader Zilinder vom Halbmesser r ist durch eine Ebene schief durchschnitten; die Länge der kleinsten Seite ist a, die der gegenüberliegenden größten b. Wie groß ist der Körperinhalt?
5. Es soll in der Seitenkante einer geraden Pyramide ein Punkt von solcher Beschaffenheit gesucht werden, daß wenn man durch denselben eine Ebene parallel mit der Basis legt, die abgekürzte Pyramide $\frac{m}{n}$ von der ganzen Pyramide betrage.

6. Man soll in der Seite eines geraden Kegels den Punkt bestimmen, durch welchen eine mit der Basis parallele Ebene gelegt werden muß, damit der abgeschnittene Kegelstuß $\frac{m}{n}$ des ganzen Kegels betrage.
7. Wie muß ein gegebener gerader Kegel abgestuzt werden, damit sein Rauminhalt so groß werde, als der Inhalt einer gegebenen Kugel?
8. Von einem Metall, dessen spezifisches Gewicht s ist, soll eine hohle Kugel vom Halbmesser r verfertigt werden, welche unter dem Wasser schwimmt; wie groß wird der Halbmesser der Höhlung sein müssen, wenn man diese als luftleer annimmt?

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

§. 193.

Jedes ebene oder sphärische Dreieck enthält sechs Stücke, drei Seiten und drei Winkel. Diese stehen in einem so innigen Zusammenhange, daß man im Allgemeinen aus drei gegebenen Stücken, worunter jedoch bei ebenen Dreiecken wenigstens eine Seite sein muß, durch einfache Konstrukzionen auch die übrigen drei Stücke bestimmen, und so das Dreieck verzeichnen kann. Allein die geometrische Konstrukzion hat den Uebelstand, daß sie wegen der Unvollkommenheit der dabei benöthigten Instrumente stets nur angenäherte und unzureichende Auflösungen liefern kann; man sah sich daher veranlaßt, das graphische Verfahren mit der Rechnung zu verbinden, welche letztere jeden Grad von Genauigkeit zuläßt. Aber da schien eine andere Schwierigkeit in den Weg zu treten; man kann wohl Linien mit andern Linien, Winkel mit Winkeln, aber nicht Linien mit Winkeln unmittelbar vergleichen, weil beiden wesentlich verschiedene Maßeinheiten zu Grunde liegen. Glücklicher Weise fand man, daß es gewisse gerade Linien gibt, welche mit den Winkeln in einer solchen Wechselbeziehung stehen, daß sich die Größe eines jeden Winkels durch die Länge jener Linien und umgekehrt darstellen läßt. Diese Linien, welche die Größe der Winkel auf eine unzweideutige Art bestimmen, heißen *trigonometrische Linien* oder *Funkzionen*, und jener Theil der Geometrie, welcher ihre gegenseitigen Relazionen untersucht und dieselben anwenden lehrt, die *Trigonometrie*.

Je nachdem sich die Trigonometrie mit der Berechnung der ebenen oder sphärischen Figuren beschäftiget, wird sie die *ebene* oder *sphärische* Trigonometrie genannt.

Erster Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Trigonometrische Funkzionen und ihr Zusammenhang.

1. Sinus und Cosinus.

§. 194.

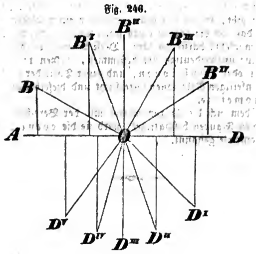
Wenn man von dem einen Schenkel eines Winkels ein Stück abschneidet, welches der Einheit des Längenmaßes gleich ist, und vom Endpunkte eine Senkrechte auf den andern Schenkel fällt, so heißt die Länge dieser Senkrechten der **Sinus** jenes Winkels, das Stück des zweiten Schenkels aber, das zwischen der Senkrechten und dem Scheitel liegt, der **Cosinus**.

Fig. 245.

Nimmt man (Fig. 245) $BO = 1$ an und zieht $BC \perp AO$, so ist $BC = \sin . \alpha$ und $CO = \cos . \alpha$.

Wenn sich der Winkel α ändert, so werden sich offenbar auch die Linien BC und CO, nämlich $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ ändern. Um den Zusammenhang zwischen dem Winkel und dessen Sinus und Cosinus für jede Größe des Winkels klar zu ersehen, nehme man (Fig. 246) den Schen-

Fig. 246.



kel AO des Winkels α als unbeweglich, den Schenkel BO dagegen als beweglich an, so daß er nach und nach in die Lagen B'O, B''O, B'''O, B''''O, DO, D'O, ... zu stehen kommt. Man sieht, daß zur Bestimmung des Sinus die Senkrechte auf AO oder auf die Verlängerung davon bald von oben herab, bald von unten hinauf gezogen werden müsse; wird nun der Sinus oberhalb von AO als positiv angenommen, so muß der unter AO liegende Sinus als negativ angenommen werden. Eben so wird der Cosinus bald von O gegen A hin, bald von O gegen D hin gerechnet; nimmt man den Cosinus im ersten Falle als positiv an, so muß er im zweiten Falle, wo er in der gerade entgegengesetzten Richtung liegt, als negativ betrachtet werden. Aus der bloßen Anschauung der Figur ergeben sich folgende Relazionen:

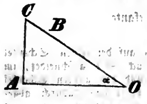
1) Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Cosinus ohne Ende der Einheit nähert; für $\alpha = 0$ ist daher $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = +1$.
2) Läßt man α von 0 bis 90° wachsen, so nimmt $\sin\alpha$ zu, während $\cos\alpha$ abnimmt, beide sind positiv. Für $\alpha = 90°$ ist $\sin\alpha = +1$, $\cos\alpha = 0$.
3) Wächst α von 90° bis 180°, so ist der Sinus positiv und nimmt ab, der Cosinus dagegen ist negativ und wächst. Wird $\alpha = 180°$, so hat man $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$.
4) Während α von 180° bis 270° zunimmt, ist $\sin\alpha$ negativ und zunehmend, $\cos\alpha$ auch negativ aber abnehmend. Für $\alpha = 270°$ wird $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$.
5) Wird $\alpha > 270°$ aber $< 360°$, so ist der Sinus negativ und abnehmend, der Cosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360°$ ist endlich $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = +1$.

2. Tangente und Sekante.

§. 195.

Wenn man von dem einen Schenkel eines Winkels ein Stück gleich 1 abschneidet, im Endpunkte darauf eine Senkrechte errichtet, und den andern Schenkel verlängert, bis er diese Senkrechte durchschneidet, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück der Senkrechten die **Tangente**, und der verlängerte Schenkel, vom Scheitel aus genommen, die **Sekante** jenes Winkels.

Fig. 247.

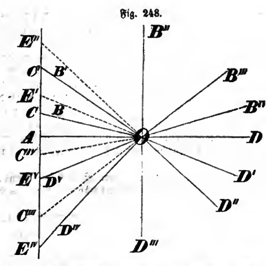


Macht man (Fig. 247) AO = 1 und AC $\perp$ AO, so ist $AC = \tang\alpha$ und $OC = \sec\alpha$.

Die Abhängigkeit der Tangente und Sekante eines Winkels von der Größe desselben ersieht man aus der Figur 248.

Die Tangenten nach aufwärts werden als positiv angenommen, daher jene nach abwärts negativ sind. Nimmt man eben so die Sekanten, wenn der zweite Schenkel in seiner eigentlichen Richtung verlängert wird,

Fig. 248.



als positiv an, so müssen sie als negativ betrachtet werden, wenn die Verlängerung in der entgegengesetzten Richtung über den Scheitel hinaus geschieht.

1) Für $\alpha = 0$ ist $\tang \alpha = 0$, $\sec \alpha = +1$.
2) Wächst α von 0 bis 90°, so sind $\tang \alpha$ und $\sec \alpha$ positiv und zunehmend. Wird endlich $\alpha = 90^\circ$, so werden Tangente und Sekante unendlich groß.
3) Läßt man α über 90° hinaus bis 180° wachsen, so werden Tangente und Sekante negativ und abnehmend. Für $\alpha = 180^\circ$ wird $\tang \alpha = 0$, $\sec \alpha = -1$.
4) Wenn α von 180° bis 270° wächst, nehmen Tangente und Sekante zu, und zwar ist die Tangente positiv, die Sekante negativ. Für $\alpha = 270^\circ$ sind Tangente und Sekante unendlich groß.
5) Wächst α über 270° bis 360°, so nehmen Tangente und Sekante ab, die Tangente ist negativ, die Sekante positiv. Wird endlich $\alpha = 360^\circ$, so ist $\tang \alpha = 0$, $\sec \alpha = +1$.

3. Cotangente und Cosekante.

§. 196.

Wenn man im Scheitel eines Winkels auf den einen Schenkel eine Senkrechte zieht, von derselben ein Stück $= 1$ abschneidet, im Endpunkte eine zweite Senkrechte errichtet, und den andern Schenkel verlängert, bis er diese durchschneidet, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück dieser letztern Senkrechten die **Cotangente**, und der verlängerte Schenkel vom Scheitel an gerechnet die **Cosekante** jenes Winkels.

Zieht man (Fig. 249) $OC \perp AO$, schneidet $OC = 1$ ab, und macht $CD \perp OC$, so ist $CD = \cot \alpha$ und $OD = \operatorname{cosec} \alpha$.

Fig. 249. Die Beschaffenheit der Cotangente und Cosekante für die von 0 bis 360° wachsenden Winkel läßt sich auf dieselbe Art ableiten, wie jene der Tangente und Sekante nachgewiesen wurde.

Die hier angeführten Linien, nämlich Sinus, Cosinus, Tangente, Sekante, Cotangente und Cosekante sind jene **trigonometrischen Funkzionen**, welche die Größe eines Winkels unzweideutig bestimmen.

Die zu den verschiedenen Winkeln gehörigen trigonometrischen Funkzionen, oder gewöhnlich deren Logarithmen, findet man in eigenen **Tafeln** zusammengestellt, deren Einrichtung und Gebrauch man am besten aus den ihnen vorausgeschickten Einleitungen ersehen kann.

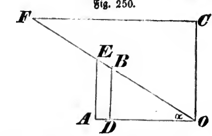
4. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen desselben Winkels.

§. 197.

Es sei (Fig. 250) $AO = BO = CO = 1$, ferner $BD \perp AO$, $AE \perp AO$, $OC \perp AO$, und $CF \perp OC$, so ist

$$BD = \sin\alpha,\quad AE = \tang\alpha,\quad CF = \cot\alpha,$$
$$DO = \cos\alpha,\quad OE = \sec\alpha,\quad OF = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Fig. 250.



Aus den rechtwinkligen Dreiecken BDO, EAO, FCO folgt

$$BD^2 + DO^2 = BO^2,\quad AE^2 + AO^2 = OE^2,\quad CF^2 + CO^2 = OF^2;$$

oder

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ldots 1),\quad \tang^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \ldots 2),$$
$$\cot^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha \ldots 3).$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AEO und DBO ist

$$AE : BD = AO : DO \quad \text{und} \quad EO : BO = AO : DO$$

oder $\tang\alpha : \sin\alpha = 1 : \cos\alpha$ und $\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$,

woraus $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ldots 4)$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ldots 5)$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CFO und DOB folgt eben so

$$\cot.\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ldots 6),\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \ldots 7).$$

Aus den beiden Ausdrücken 4) und 6) folgt noch überdieß

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \ldots 8).$$

5. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen verschiedener Winkel.

§. 198.

a) Komplementäre Winkel.

Zwei Winkel, welche sich zu 90° ergänzen, z. B. 60° und 30°, heißen **komplementäre**. Zwei solche Winkel können allgemein durch α und $90 - \alpha$ ausgedrückt werden.

Fig. 251.

Da (Fig. 251)

$BD = \sin \alpha$, $BG = \sin(90 - \alpha)$,
$DO = \cos \alpha$, $GO = \cos(90 - \alpha)$,
$AE = \tan \alpha$, $CF = \tan(90 - \alpha)$,
$OE = \sec \alpha$, $OF = \sec(90 - \alpha)$,
$CF = \cot \alpha$, $AE = \cot(90 - \alpha)$,
$OF = \operatorname{cosec} \alpha$, $OE = \operatorname{cosec}(90 - \alpha)$

ist, so folgt

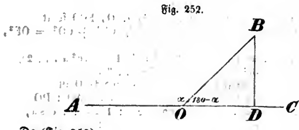
$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha \quad .. 9)$ $\qquad \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha \quad .. 10)$
$\tan(90 - \alpha) = \cot \alpha \quad .. 11)$ $\qquad \cot(90 - \alpha) = \tan \alpha \quad .. 12)$
$\sec(90 - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \quad .. 13)$ $\qquad \operatorname{cosec}(90 - \alpha) = \sec \alpha \quad .. 14)$

§. 199.

b) Supplementäre Winkel.

Zwei Winkel, deren Summe 180° beträgt, werden **supplementäre Winkel** genannt, z. B. 126° und 54°. Zwei supplementäre Winkel werden im Allgemeinen durch α und $180 - \alpha$ bezeichnet.

Fig. 252.



Da (Fig. 252)

$BD = \sin \alpha$, $\qquad BD = \sin(180 - \alpha)$,
$OD = -\cos \alpha$, $\qquad OD = \cos(180 - \alpha)$

ist, so ergibt sich

$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha \ldots 15)$ $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha \ldots 16)$

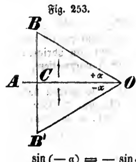
$$\tang(180-\alpha) = \frac{\sin(180-\alpha)}{\cos(180-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tang\alpha \ldots 17)$$

§. 200.

c) Negative Winkel.

Werden die Winkel, welche entstehen, wenn der bewegliche Schenkel BC (Fig. 253) von dem unbeweglichen AO aus nach oben gedreht wird, als positiv betrachtet, so müssen die Winkel, welche durch die Drehung des beweglichen Schenkels nach unten entstehen, als negativ angesehen werden.

Fig. 253.



Ist der Winkel $AOB = AOB^1$, setzt man $AOB = \alpha$, und denkt sich die Winkel durch die Drehung von AO aus entstanden, so muß $AOB^1 = -\alpha$ angenommen werden. Macht man nun $OB = OB^1 = 1$, und zieht von B und B^1 auf AO Senkrechte, so müssen die dadurch entstehenden Dreiecke kongruent sein, und daher jene beiden Senkrechten in demselben Punkte C zusammentreffen. Da nun $BC = \sin\alpha$, $B^1C = -\sin(-\alpha)$, und $OC = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$ ist, so folgt

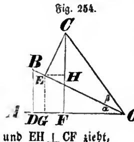
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \ldots 18)$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \ldots 19)$

$$\tang(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tang\alpha \ldots 20)$$

§. 201.

d) Die Summe und die Differenz zweier Winkel.

Fig. 254.



Ist (Fig. 254) $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Macht man nun $OB = OC = 1$, und zieht $BD \perp AO$, $CE \perp BO$, $CF \perp AO$, so ist

$BD = \sin\alpha$, $CE = \sin\beta$, $CF = \sin(\alpha+\beta)$,
$DO = \cos\alpha$, $EO = \cos\beta$, $FO = \cos(\alpha+\beta)$.

Es soll nun $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ durch den Sinus und Cosinus von α und β ausgedrückt werden. Es ist, wenn man $EG \perp AO$ und $EH \perp CF$ zieht,

$$\sin(\alpha+\beta) = CF = HF + CH = EG + CH,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = FO = GO - GF = GO - EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$EG : BD = EO : BO$, $GO : DO = EO : BO$,

oder

$EG : \sin\alpha = \cos\beta : 1$, $GO : \cos\alpha = \cos\beta : 1$,

daher $EG = \sin\alpha\cos\beta$, $GO = \cos\alpha\cos\beta$.

Da der Winkel $ECH = BOD$ ist, indem die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen, und da somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

$$CH : DO = CE : BO, \qquad EH : BD = CE : BO,$$

oder

$$CH : \cos\alpha = \sin\beta : 1, \qquad EH : \sin\alpha = \sin\beta : 1;$$

daher

$$CH : \cos\alpha \sin\beta, \qquad EH = \sin\alpha \sin\beta.$$

Substituirt man nun die für EG, GC, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, so erhält man die Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad \ldots \; 21)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad \ldots \; 22)$$

Hier wurden α und β als spitzige Winkel und als positiv vorausgesetzt. Die Giltigkeit der erhaltenen Ausdrücke läßt sich übrigens auf gleiche Art für jeden beliebigen Werth von α und β nachweisen, selbst dann, wenn α oder β negativ wäre.

Setzt man in den letzten Formeln $-\beta$ statt β, so werden dadurch, da $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ und $\cos(-\beta) = \cos\beta$ ist, nur die Vorzeichen derjenigen Glieder geändert, in denen $\sin\beta$ vorkommt; man erhält also

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad \ldots \; 23)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad \ldots \; 24)$$

Da $\tang(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$ ist, so erhält man, wenn man Zähler und Nenner des letztern Bruches durch $\cos\alpha \cos\beta$ dividirt,

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}$$

oder

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{\tang\alpha + \tang\beta}{1 - \tang\alpha \tang\beta} \quad \ldots \; 25)$$

Auf dieselbe Art findet man

$$\tang(\alpha-\beta) = \frac{\tang\alpha - \tang\beta}{1 + \tang\alpha \tang\beta} \quad \ldots \; 26)$$

§. 202.

Aus den Formeln 21), 22), 23), 24) erhält man durch Addizion und Subtrakzion

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \sin\beta;$$

oder wenn man

$$\alpha + \beta = \varphi, \qquad \alpha - \beta = \psi,$$

daher $\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}, \qquad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2}$ setzt,

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2} \ldots 27)$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2} \ldots 28)$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2} \ldots 29)$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2} \ldots 30)$$

Aus 27) und 28) folgt durch die Division

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}}{\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2}} = \tan\frac{\varphi + \psi}{2}\cot\frac{\varphi - \psi}{2};$$

oder

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\tan\frac{\varphi + \psi}{2}}{\tan\frac{\varphi - \psi}{2}} \ldots 31).$$

d) Doppelte und halbe Winkel.

§. 203.

Setzt man in den Formeln 21) und 22) $\beta = \alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots 32)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ldots 33).$$

Da nun

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \text{ nach } 1)$$

und $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ nach 33),

so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addirt und subtrahirt werden,

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha, \qquad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha;$$

oder

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}.$$

Wird nun $2\alpha = \varphi$, und somit $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ gesetzt, so hat man

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} \ldots 34), \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{2}} \ldots 35).$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt endlich durch die Division

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} \quad \ldots \; 36).$$

6. Formeln zur Selbstübung im Ableiten.

§. 204.

1) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

2) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $\operatorname{tang} 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$.

5) $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}} = \dfrac{2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}$.

6) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}} = \dfrac{1-\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}$.

7) $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

8) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$.

9) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$.

10) $\operatorname{tang} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}^2\alpha}$.

11) $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{1+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}$.

12) $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha}$.

13) $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\sin\alpha}$.

14) $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$.

15) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{2}$.

16) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2}$.

17) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tang}(45^0 - \alpha)$.

18) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \cot(45^0 - \alpha)$.

19) $\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$.

20) $\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$.

21) $\cot\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$.

22) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

23) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

24) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma) =$
$= -4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

25) $\sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\alpha+\gamma-\beta) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$
$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

26) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) =$
$= 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

II. Anwendung der ebenen Trigonometrie.

A. Auflösung der ebenen Dreiecke.

§. 205.

Ein Dreieck auflösen heißt, aus denjenigen Stücken, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, die übrigen Stücke durch Rechnung finden.

Dabei kommt es vor allem darauf an, aus den geometrischen Eigenschaften des Dreieckes Gleichungen abzuleiten, in welchen sowohl die bestimmenden als die zu suchenden Stücke vorkommen; durch Auflösung dieser Gleichungen findet man dann die gesuchten Größen. Solche Gleichungen wollen wir auflösende Gleichungen nennen.

Da Winkel und Seiten ungleichartige Größen sind, so ist von selbst einleuchtend, daß man dieselben nicht unmittelbar mit einander vergleichen kann. Setzt man aber statt der Winkel die trigonometrischen Linien oder Funkzionen, durch welche die Größe der Winkel unzweideutig bestimmt wird, so hat man dann Linien mit Linien zu vergleichen und aus dieser Vergleichung lassen sich die auflösenden Gleichungen ableiten; diese enthalten also die Seiten des Dreieckes und die trigonometrischen Funkzionen der Winkel.

Bei der Berechnung numerischer Beispiele ist es vortheilhafter, statt der Funkzionen selbst die Logarithmen derselben anzuwenden. Wie man zu einem Winkel den Logarithmus der Funkzion und umgekehrt zu dem Logarithmus der Funkzion den zugehörigen Winkel finden könne, ersieht man aus der jedem logarithmisch-trigonometrischen Handbuche vorgedruckten Anweisung zum Gebrauche desselben.

a) Rechtwinklige Dreiecke.

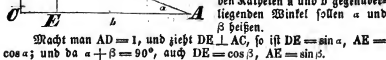
Lehrsätze, aus denen sich die auflösenden Gleichungen ergeben.

§. 206.

1. Der bekannte Pythagoräische Lehrsatz, dessen Beweis bereits an zwei Orten angeführt wurde, gibt die Gleichung
$$c^2 = a^2 + b^2,$$
wo c die Hypothenuse, a und b die Katheten bedeuten.

2. **Jede Kathete ist gleich der Hypothenuse multiplizirt mit dem Sinus des jener Kathete gegenüberliegenden, oder mit dem Cosinus des ihr anliegenden Winkels.**

Fig. 255.



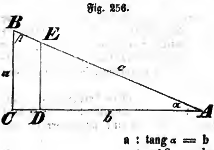
Es seien (Fig. 255) die Katheten $BC = a$, $AC = b$, und die Hypothenuse $AB = c$; die den Katheten a und b gegenüberliegenden Winkel sollen α und β heißen.

Macht man $AD = 1$, und zieht $DE \perp AC$, so ist $DE = \sin\alpha$, $AE = \cos\alpha$; und da $\alpha + \beta = 90^0$, auch $DE = \cos\beta$, $AE = \sin\beta$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ADE folgt nun
$$BC : DE = AB : AD \quad \text{und} \quad AC : AE = AB : AD$$
oder
$$a : \sin\alpha = c : 1 \quad \text{und} \quad b : \sin\beta = c : 1,$$
$$a : \cos\beta = c : 1 \quad \text{„} \quad b : \cos\alpha = c : 1,$$
daher
$$a = c \sin\alpha \quad \text{und} \quad b = c \sin\beta$$
$$= c \cos\beta \qquad\qquad = c \cos\alpha.$$

3. **Jede Kathete ist gleich der andern Kathete multiplizirt mit der Tangente des der erstern Kathete gegenüberliegenden, oder mit der Cotangente des ihr anliegenden Winkels.**

Fig. 256.



Man mache im rechtwinkligen Dreiecke ACB (Fig. 256) das Stück $AD = 1$ und ziehe $DE \perp AC$, so ist $DE = \tan\alpha = \cot\beta$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und AED folgt
$$BC : DE = AC : AD$$
oder
$$a : \tan\alpha = b : 1,$$
$$a : \cot\beta = b : 1,$$
daher
$$a = b \tan\alpha$$
$$= b \cot\beta.$$

Auflösungsfälle.

§. 207.

1) **Es seien die beiden Katheten a und b gegeben; man suche die Winkel α und β, und die Hypothenuse c.**

Aus $a = b \tang\alpha = b \cot\beta$ folgt

$$\tang\alpha = \cot\beta = \frac{a}{b},$$

woraus sich die beiden spitzigen Winkel α und β berechnen lassen.

Zur Bestimmung der Hypothenuse wendet man die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ oder $a = c \sin a$ an, woraus beziehungsweise

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{oder} \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

folgt.

Es sei z. B. $a = 325'$, $b = 418'$.

Aus $\tang\alpha = \frac{a}{b}$ folgt $\log\tang\alpha = \log a - \log b$. Man hat also

$$\begin{aligned} \log a &= 2{\cdot}511\ 8834 \\ \log b &= 2{\cdot}621\ 1763 \\ \hline \log\tang\alpha &= 9{\cdot}890\ 7071 - 10 = \log\tang 37^0\,51'\,56'' \\ \alpha &= 37^0\,51'\,56'' \\ \text{daher } \beta &= 52^0\ \ 8'\ \ 4''. \end{aligned}$$

Weil nun $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, so hat man

$$\begin{aligned} \log a &= 2{\cdot}511\ 8834 \\ \log\sin\alpha &= 9{\cdot}788\ 0334 - 10 \\ \hline \log c &= 2{\cdot}723\ 8489 = \log 529{\cdot}48 \\ c &= 529{\cdot}48', \end{aligned}$$

welcher Werth sich auch aus der Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt.

2) **Die Hypothenuse c und eine Kathete a sind gegeben; man suche die Winkel α und β, und die zweite Kathete b.**

Zur Bestimmung der Winkel folgt aus $a = c \sin\alpha = c \cos\beta$ die Formel

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Die Kathete b ergibt sich aus einer der Formeln

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad \text{oder} \qquad b = \frac{a}{\tang\alpha}.$$

Es sei z. B. $c = 1234'$ und $a = 765'$. Man hat

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \log a &= 2{\cdot}883\ 6614 \\ \log c &= 3{\cdot}091\ 3152 \\ \hline \log\sin\alpha &= 9{\cdot}792\ 3462 - 10 \\ \alpha &= 38^0\,18'\,41'', \\ \text{daher } \beta &= 51^0\,41'\,19''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{a}{\tang\alpha} \\ \log a &= 2{\cdot}883\ 6614 \\ \log\tang\alpha &= 9{\cdot}897\ 6685 - 10 \\ \hline \log b &= 2{\cdot}985\ 9929 \\ b &= 968{\cdot}26' \end{aligned}$$

3) Gegeben sind eine Kathete a und ein Winkel, z. B. α; zu suchen sind der andere Winkel β, die Hypothenuse c, und die zweite Kathete b.

Zur Berechnung dienen die Formeln

$$\beta = 90^0 - \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}, \quad b = \frac{a}{\tan g\, \alpha}.$$

Ist z. B. a = 714·3′ und $\alpha = 58^0\,43'\,30''$, so hat man

$$\beta = 31^0\,16'\,30''$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad\qquad b = \frac{a}{\text{tang}\,\alpha}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{\cdot}853\ 8807 & \log a &= 2{\cdot}853\ 8807 \\ \log\sin\alpha &= 9{\cdot}931\ 8063 - 10 & \log\text{tang}\,\alpha &= 0{\cdot}216\ 5165 \\ \log c &= 2{\cdot}922\ 0744 & \log b &= 2{\cdot}637\ 3642 \\ c &= 935{\cdot}75'. & b &= 433{\cdot}86'. \end{aligned}$$

4) Gegeben sind die Hypothenuse c und ein Winkel, z. B. α, zu suchen der andere Winkel und die beiden Katheten.

Auflösende Gleichungen:

$$\beta = 90^0 - \alpha, \quad a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$

Es sei z. B. c = 197′ und $\alpha = 27^0\,13'\,57''$. Man erhält

$$\beta = 62^0\,46'\ 3''$$

$$\begin{aligned} a &= c\sin\alpha & b &= c\cos\alpha \\ \log c &= 2{\cdot}294\ 4662 & \log c &= 2{\cdot}294\ 4662 \\ \log\sin\alpha &= 9{\cdot}660\ 4879 - 10 & \log\cos\alpha &= 9{\cdot}848\ 8785 - 10 \\ \log a &= 1{\cdot}954\ 9541 & \log b &= 2{\cdot}243\ 4447 \\ a &= 90{\cdot}15' & b &= 175{\cdot}16' \end{aligned}$$

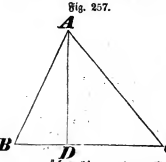
b) Schiefwinklige Dreiecke.

Lehrsätze, auf denen die Auflösung beruht.

§. 208.

1) In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten so zu einander wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 257.



Zieht man AD ⊥ BC (Fig. 357), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC

AD = AB . sin B und AD = AC sin C,

daher AB . sin B = AC sin C

oder AB : AC = sin C : sin B.

2) In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel zu der Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel.

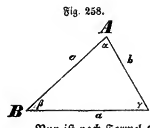


Fig. 258.

Setzt man (Fig. 258) hier und in dem Folgenden BC = a, AC = b, AB = c, und drückt die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ aus, so ist

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta,$$

daher auch

$$(c + b) : (c - b) = (\sin\gamma + \sin\beta) : (\sin\gamma - \sin\beta).$$

Nun ist nach Formel 31)

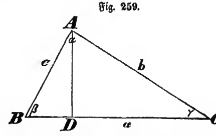
$$(\sin\gamma + \sin\beta) : (\sin\gamma - \sin\beta) = \tang\frac{\gamma+\beta}{2} : \tang\frac{\gamma-\beta}{2},$$

daher

$$(c + b) : (c - b) = \tang\frac{\gamma+\beta}{2} \tang\frac{\gamma-\beta}{2},$$

3) **In jedem Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Produkte dieser beiden Seiten multiplizirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.** (Carnot'scher Lehrsatz.)

Fig. 259.



Zieht man AD ⊥ BC (Fig. 259), so ist

$$BD = c \cdot \cos\beta, \text{ und}$$
$$CD = b \cdot \cos\gamma, \text{ daher}$$
$$BD + CD = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma,$$

oder

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

Eben so erhält man

$$b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha,$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha.$$

Multiplizirt man die erste dieser drei Gleichungen mit a, die zweite mit b, und die dritte mit c, so findet man

$$a^2 = ab \cdot \cos\gamma + ac \cdot \cos\beta,$$
$$b^2 = ab \cdot \cos\gamma + bc \cdot \cos\alpha,$$
$$c^2 = ac \cdot \cos\beta + bc \cdot \cos\alpha.$$

Subtrahirt man nun von der ersten Gleichung die Summe der beiden letztern, so erhält man

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \, . \cos\alpha,$$

oder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos\alpha.$$

Eben so ergibt sich

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \, . \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, . \cos\gamma.$$

Wie man leicht sieht, ist der Pythagoräische Lehrsatz nur ein besonderer Fall des Carnot'schen; denn setzt man $\gamma = 90^0$, wo sodann c die Hypothenuse, a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes bedeuten, so hat man wegen $\cos 90^0 = 0$ die Gleichung

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Auflösungsfälle.

§. 209.

1) **Wenn eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ gegeben sind.**

Man hat erstlich $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner folgen aus $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$ und $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$ die Formeln

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 788'$, $\beta = 55^0 43' 18''$, $\gamma = 72^0 12' 35''$.

Man erhält

$$\alpha = 52^0 4' 7''$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$\log a = 2{\cdot}896 \;\; 5262$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}917 \;\; 1437 - 10$
$2{\cdot}813 \;\; 6699$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}896 \;\; 9380 - 10$
$\log b = 2{\cdot}916 \;\; 7389$
$b = 825{\cdot}54'$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$\log a = 2{\cdot}896 \;\; 5262$
$\log \sin\gamma = 9{\cdot}978 \;\; 7197 - 10$
$2{\cdot}875 \;\; 2459$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}896 \;\; 9380 - 10$
$\log c = 2{\cdot}978 \;\; 3079$
$c = 951{\cdot}28'$

Wäre außer der Seite a ein anliegender Winkel β, und der gegenüberliegende α gegeben, so würde man zuerst γ berechnen, und dann wie vorhin verfahren.

§. 210.

2) **Wenn zwei Seiten b und c, und der von ihnen eingeschlossene Winkel α gegeben sind.**

In diesem Falle wendet man zur Bestimmung der Winkel β und γ die Proporzion

$$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2} : \operatorname{tang} \frac{\beta - \gamma}{2}$$

an, aus welcher

$$\tang \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \tang \frac{\beta + \gamma}{2}}{b + c}$$

folgt Da $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$, und $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, so ist $\tang \frac{\beta + \gamma}{2}$ bekannt, und es läßt sich mittelst der letzten Gleichung auch $\frac{\beta - \gamma}{2}$ bestimmen. Kennt man aber $\frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\frac{\beta - \gamma}{2}$, so sind dadurch auch β und γ gegeben; denn es ist

$$\frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} = \beta \text{ und } \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2} = \gamma.$$

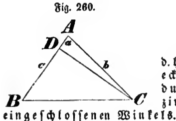
Die dritte Seite a findet man dann aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Aus b, c und α kann man unmittelbar auch den Flächeninhalt f des Dreieckes bestimmen. Ist nämlich CD ⊥ AB (Fig. 260), so hat man

$$f = \frac{c \ CD}{2}.$$

Fig. 260.



Aber CD = b sin α, daher

$$f = \frac{bc}{2} \sin \alpha,$$

d.h der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten, multiplizirt mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Es sei z. B. b = 748′, c = 375′, $\alpha = 63^0 35' 30''$.

Man hat folgende Rechnung:

$\beta + \gamma = 116^0 24' 30''$
$\frac{\beta + \gamma}{2} = 58^0 12' 15''$
$b + c = 1123'$
$b - c = 373'$

$$\tang \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \tang \frac{\beta + \gamma}{2}}{b + c}$$

$\log (b - c) = 2{\cdot}571 \ 7088$
$\log \tang \frac{\beta + \gamma}{2} = 0 \ 207 \ 6604$
$2 \ 779 \ 3692$
$\log (b + c) = 3{\cdot}050 \ 3798$
$\log \tang \frac{\beta - \gamma}{2} = 9{\cdot}728 \ 9894 - 10$
$\frac{\beta - \gamma}{2} = 28^0 \ 10' \ 54''$
$\frac{\beta + \gamma}{2} = 58^0 \ 12' \ 15''$

folglich $\beta = 86^0 \ 23' \ 9''$
$\gamma = 30^0 \ 1' \ 21''$

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\log b = 2{\cdot}873\ 9016$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}952\ 1369 - 10$
$2{\cdot}826\ 0385$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}999\ 1354 - 10$
$\log a = 2{\cdot}826\ 9031$
$a = 671{\cdot}28'$

$$f = \frac{bc}{2} \sin\alpha$$

$\log b = 2{\cdot}873\ 9016$
$\log c = 2{\cdot}574\ 0313$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}952\ 1369 - 10$
$5{\cdot}400\ 0698$
$\log 2 = 0{\cdot}301\ 0300$
$\log f = 5{\cdot}099\ 0398$
$f = 125615\,\square'$.

§. 211.

3) Es seien zwei Seiten b und c, wo $b > c$, und der der größern Seite gegenüberliegende Winkel β gegeben.

Aus $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ erhält man

$$\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}.$$

Diese Formel gibt den Sinus von γ. Da aber zu jedem Sinus zwei Winkel gehören, ein spitziger und ein stumpfer, so würde der Werth von γ unbestimmt sein, wenn nicht bekannt wäre, daß β der größern Seite gegenüber liegt. Diese Unbestimmtheit verschwindet, sobald man weiß, daß $b > c$, also auch $\beta > \gamma$ ist, weil dann γ spitzig sein muß, welchen Werth auch β haben mag.

Da nun β und γ bekannt sind, erhält man

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma).$$

Die Seite a findet man aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wenn z. B. $b = 1238'$, $c = 519'$, $\beta = 78^0\ 17'\ 20''$ ist, so ergibt sich folgende Auflösung:

$$\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}$$

$\log c = 2{\cdot}715\ 1674$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}990\ 8640 - 10$
$2{\cdot}706\ 0314$
$\log b = 3{\cdot}092\ 7206$
$\log \sin\gamma = 9{\cdot}613\ 3308 - 10$
$\gamma = 24^0 14' 10''$
$\beta = 78^0 17' 20''$
$102^0 31' 30''$
daher $\alpha = 77^0 28' 30''$

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\log b = 3{\cdot}082\ 7206$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}990\ 5394 - 10$
$3{\cdot}092\ 2600$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}980\ 8640 - 10$
$\log a = 3{\cdot}091\ 1960$
$a = 1234{\cdot}23'$

§. 212.

4) Wenn alle drei Seiten a, b und c bekannt sind.

Zur Bestimmung der drei Winkel könnte unmittelbar der Carnot'sche Lehrsatz angewendet werden; aus der Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

folgt nämlich

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

woraus sich der Winkel α finden läßt. Es kann hier kein Zweifel obwalten, ob α ein spitziger oder ein stumpfer Winkel ist; denn

für $b^2 + c^2 > a^2$ ist $\cos\alpha$ positiv, daher α spitzig;
„ $b^2 + c^2 = a^2$ „ $\cos\alpha = 0$ „ $\alpha = 90$;
„ $b^2 + c^2 < a^2$ „ $\cos\alpha$ negativ, „ α stumpf.

Auf dieselbe Art könnten auch die Winkel β und γ bestimmt werden.

Dieses Verfahren, die Winkel zu berechnen, ist übrigens unbequem, weil die Formeln zur logarithmischen Berechnung nicht geeignet sind. Es sollen daher hier Formeln entwickelt werden, welche sich logarithmisch behandeln lassen.

Addirt und subtrahirt man die beiden Gleichungen

$$1 = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

so erhält man

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

oder

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc},$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc},$$

somit

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}},$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}},$$

oder, weil nach 34) und 35)

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ und } \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ ist,}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}},$$

Drückt man nun der Kürze halber die halbe Summe der drei Seiten a, b, c durch s aus, so daß

$$a + b + c = 2s$$

gesetzt wird, so erhält man, wenn von dieser Gleichung nach der Ordnung 2a, 2b, 2c abgezogen wird,

$$-a + b + c = 2(s - a),$$
$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c).$$

Durch Substituzion dieser Werthe in obige Formeln hat man endlich

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Wenn man dieselben Berechnungen in Bezug auf β und γ durchführt, so findet man

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \text{und } \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$
$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}; \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich wegen $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\varphi$ auch

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$
$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

In Bezug auf die Bedeutung der Winkel $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ kann keine Unbestimmtheit eintreten, da sie als halbe Dreieckswinkel nothwendig spitzig sein müssen.

Aus den gegebenen drei Seiten eines Dreieckes läßt sich unmittelbar auch der Flächeninhalt berechnen.

Es ist $f = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma = \frac{ab}{2} \cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, woraus

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

folgt, d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte von vier Faktoren, deren einer die halbe Summe der Seiten ist, die drei andern aber die Unterschiede zwischen dieser halben Summe und jeder einzelnen Seite sind.

Man nehme z. B. $a = 328{\cdot}5'$, $b = 412{\cdot}3'$, $c = 371{\cdot}4'$ an.

Wenn man zur Bestimmung der Winkel die Formeln für den Sinus der halben Winkel anwendet, so hat man

$$\begin{aligned} a &= 328{\cdot}5 \\ b &= 412{\cdot}3 \\ c &= 371{\cdot}4 \\ a+b+c &= 1112{\cdot}2 \\ s &= 556{\cdot}1 \\ s-a &= 227{\cdot}6 \\ s-b &= 143{\cdot}8 \\ s-c &= 184{\cdot}7 \end{aligned}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\begin{aligned} \log(s-b) &= 2{\cdot}157\ 7589 \\ \log(s-c) &= 2{\cdot}266\ 4669 \\ \hline &\ 4{\cdot}424\ 2258 \\ \log b &= 2{\cdot}615\ 2133 \\ \log c &= 2{\cdot}569\ 8419 \\ \hline &\ 19{\cdot}239\ 170{\cdot}6 - 20 \end{aligned}$$

$$\log \sin \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}619 \quad 5853 - 10$$

$$\frac{\alpha}{2} = 24^0\ 36'\ 43{\cdot}33''$$

$$\alpha = 49^0\ 13'\ 26{\cdot}6''$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-c)}{ac}} \qquad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)}{ab}}$$

$\log (s - a) = 2{\cdot}357 \quad 1723$	$\log (s - a) = 2{\cdot}357 \quad 1723$
$\log (s - c) = 2{\cdot}266 \quad 4669$	$\log (s - b) = 2{\cdot}157 \quad 7589$
$4{\cdot}623 \quad 6392$	$4.514 \quad 9312$
$\log a = 2{\cdot}516 \quad 5354$	$\log a = 2{\cdot}516 \quad 5354$
$\log c = 2{\cdot}569 \quad 8419$	$\log b = 2{\cdot}615 \quad 2133$
$19{\cdot}537 \quad 2619 - 20$	$19{\cdot}383 \quad 1825 - 20$
$\log \sin \frac{\beta}{2} = 9{\cdot}768 \quad 6309 - 10$	$\log \sin \frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}691 \quad 5912 - 10$
$\frac{\beta}{2} = 35^0\ 56'\ 37{\cdot}4''$	$\frac{\gamma}{2} = 29^0\ 26'\ 39{\cdot}3''$
$\beta = 71^0\ 53'\ 14{\cdot}8''$	$\gamma = 58^0\ 53'\ 18{\cdot}6''$

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur die für α, β, γ gefundenen Werthe addiren; ihre Summe beträgt genau 180^0.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man

$$f = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

$$\begin{aligned}
\log s &= 2{\cdot}745 \quad 1529 \\
\log (s-a) &= 2{\cdot}357 \quad 1723 \\
\log (s-b) &= 2{\cdot}157 \quad 7589 \\
\log (s-c) &= 2{\cdot}265 \quad 4669 \\
& \overline{9{\cdot}526 \quad 5510} \\
\log f &= 4{\cdot}763 \quad 2755 \\
f &= 57980 \square'.
\end{aligned}$$

B. Berechnung regelmäßiger Vielecke.

§. 213.

1. **Aus der Seite eines regelmäßigen Vieleckes den Flächeninhalt desselben, und umgekehrt aus dem Flächeninhalte die Seite zu bestimmen.**

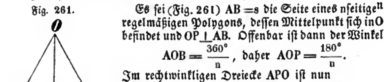


Fig. 261.

Es sei (Fig. 261) AB = s die Seite eines nseitigen regelmäßigen Polygons, dessen Mittelpunkt sich in O befindet und OP ⊥ AB. Offenbar ist dann der Winkel

$$AOB = \frac{360^0}{n}, \text{ daher } AOP = \frac{180^0}{n}.$$

Im rechtwinkligen Dreiecke APO ist nun

$$OP = AP \ .\ \cot AOP = \frac{s}{2} \cot \frac{180^0}{n},$$

somit der Flächeninhalt des Dreieckes

$$ABO = AB \cdot \frac{OP}{2} = s \cdot \frac{s}{4} \cot \frac{180^\circ}{n} = \frac{s^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}.$$

Heißt nun f der Flächeninhalt des ganzen Polygons, so hat man

$$f = \frac{ns^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n};$$

woraus sofort

$$s = \sqrt{\frac{4f}{n} \cdot \tang \frac{180^\circ}{n}} \text{ folgt.}$$

Mit Hilfe der ersten Formel kann man aus der bekannten Seite des regulären Vieleckes dessen Flächeninhalt, mittelst der zweiten aus dem Flächeninhalte die Seite berechnen.

B e i s p i e l e.

1) Es sei die Seite eines regelmäßigen Zehneckes 15″, wie groß ist der Flächeninhalt?

Hier ist $n = 10$, $\frac{180^\circ}{n} = 18^\circ$, $s = 15$; daher hat man

$$\begin{aligned}
\log s &= 1{\cdot}176 \quad 0913 \\
\log s^2 &= 2{\cdot}352 \quad 1826 \\
\log n &= 1{\cdot}000 \quad 0000 \\
\log \cot \frac{180^\circ}{n} &= 0{\cdot}488 \quad 2240 \\
\hline
& 3{\cdot}840 \quad 4066 \\
\log 4 &= 0{\cdot}602 \quad 0600 \\
\hline
\log f &= 3{\cdot}238 \quad 3466 \\
f &= 1731{\cdot}2 \,\square''
\end{aligned}$$

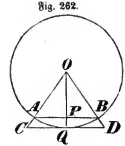
2) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfeckes sei 140 □″; man suche die Länge einer Seite.

Hier ist $n = 12$, $\frac{180^\circ}{n} = 15^\circ$, $f = 140$; man hat somit

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0{\cdot}602 \quad 0600 \\
\log f &= 2{\cdot}146 \quad 1280 \\
\log \tang \frac{180^\circ}{n} &= 9{\cdot}428 \quad 0525 - 10 \\
\hline
& 2{\cdot}176 \quad 2405 \\
\log n &= 1{\cdot}079 \quad 1812 \\
\hline
& 1{\cdot}097 \quad 0593 \\
\log s &= 0{\cdot}548 \quad 5296 \\
s &= 3{\cdot}536''.
\end{aligned}$$

§. 214.

2. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite und den Flächeninhalt des dem Kreise eingeschriebenen oder umschriebenen regelmäßigen Vieleckes zu bestimmen.



Es sei O (Fig. 262) der Mittelpunkt eines Kreises und AB = s die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen nEckes. Zieht man OQ ⊥ AB, durch Q die Tangente CD und verlängert die Halbmesser OA und OB, bis sie jene Tangente in C und D schneiden, so ist CD = S die Seite des umschriebenen regelmäßigen nseitigen Polygons.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken APO und CQO erhält man

$$AP = AO \,.\, \sin AOP \quad \text{und} \quad CQ = QO \,.\, \text{tang}\ COQ,$$

daher $AB = 2AO \,.\, \sin AOP$ und $CD = 2QO \,.\, \text{tang}\ COQ$,

oder, wenn $AO = QO = r$ gesetzt wird,

$$s = 2r \sin \frac{180^0}{n} \quad \text{und} \quad S = 2r \ \text{tang} \ \frac{180^0}{n}.$$

Für die Umfänge u und U des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen nEckes hat man sofort

$$u = 2nr \sin \frac{180^0}{n} \quad \text{und} \quad U = 2nr \ \text{tang} \ \frac{180^0}{2}.$$

Zur Bestimmung der Flächeninhalte f und F findet man zunächst

$$\triangle AOB = AB \,.\, \frac{OP}{2} \quad \text{und} \quad \triangle COD = CD \,.\, \frac{OQ}{n},$$

oder

$$\triangle AOB = 2r \sin \frac{180^0}{n} \,.\, \frac{r}{2} \cos \frac{180^0}{n} \ \text{und} \ \triangle COD = 2r \ \text{tang} \ \frac{180^0}{n} \,.\, \frac{r}{2},$$

oder

$$\triangle AOB = \frac{r^2}{2} \sin \frac{360^0}{n} \quad \text{und} \quad \triangle COD = r^2 \ \text{tang} \ \frac{180^0}{n}.$$

und daraus folgt

$$f = \frac{nr^2}{2} \,.\, \sin \frac{360^0}{n} \quad \text{und} \quad F = nr^2 \ \text{tang} \ \frac{180^0}{n}.$$

Es sei z. B. der Halbmesser eines Kreises 4'; man bestimme die Seite, den Umfang und den Flächeninhalt des eingeschriebenen und des umschriebenen Achteckes.

Man hat folgende Rechnung:

$$r = 4, \ n = 8, \ \frac{180^0}{n} = 22^0\ 30', \ \frac{360^0}{n} = 45^0$$

$s = 2r \sin \frac{180^0}{n}$	$S = 2r \ \text{tang} \frac{180^0}{n}$
$\log 2 = 0{\cdot}301\ \ 0300$	$\log 2 = 0{\cdot}300$
$\log r = 0{\cdot}602\ \ 0600$	$\log r = 0{\cdot}600$
$\log \sin \frac{180^0}{n} = 9{\cdot}582\ \ 8397 - 10$	$\log \text{tang} \frac{180^0}{n} = 9{\cdot}617\ \ 2243 - 10$
$\log s = 0{\cdot}485\ \ 9297$	$\log S = 0{\cdot}520\ \ 3134$
$s = 30{\cdot}615'$	$S = 3{\cdot}3137'$
daher $u = 24{\cdot}492'$	$U = 26{\cdot}5096'$

$$f = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$\begin{aligned}
\log r &= 0{\cdot}602\ 0600 \\
\log r^2 &= 1{\cdot}204\ 1200 \\
\log n &= 0{\cdot}903\ 0900 \\
\log \sin \frac{360^\circ}{n} &= 9{\cdot}849\ 4850 - 10 \\
\hline
& \ 1{\cdot}956\ 6950 \\
\log 2 &= 0{\cdot}301\ 0300 \\
\hline
\log f &= 1{\cdot}655\ 6650 \\
f &= 45{\cdot}255\ \square'
\end{aligned}$$

$$F = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}$$

$$\begin{aligned}
\log r &= 0{\cdot}602\ 0600 \\
\log r^2 &= 1{\cdot}204\ 1200 \\
\log n &= 0{\cdot}903\ 0900 \\
\log \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n} &= 9{\cdot}617\ 2243 - 10 \\
\hline
\log F &= 1{\cdot}724\ 4343 \\
F &= 53{\cdot}019\ \square'
\end{aligned}$$

§. 215.

3. **Aus der Seite oder dem Flächeninhalte eines regelmäßigen Polygons den Halbmesser des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises zu finden.**

Es sei s die Seite und f der Flächeninhalt eines regulären $n$seitigen Vieleckes; r heiße der Halbmesser des eingeschriebenen und R jener des umschriebenen Kreises.

Das gegebene Vieleck ist dem eingeschriebenen Kreise umschrieben, daher

$$s = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Dem umschriebenen Kreise dagegen erscheint das gegebene Polygon eingeschrieben; folglich ist

$$s = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \qquad = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich die Formeln

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}, \qquad r = \sqrt{\frac{f}{n} \cot \frac{180^\circ}{n}},$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \qquad R = \sqrt{\frac{2f}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}},$$

mittelst welcher man im Stande ist, aus der Seite oder dem Flächeninhalte eines regelmäßigen Vieleckes den Halbmesser des eingeschriebenen oder umschriebenen Kreises zu berechnen.

Beispiele.

1) Es sei die Seite eines regulären Fünfeckes $20''$; man suche r und R.

Hier ist $s = 20$, $n = 5$, $\frac{180^\circ}{n} = 36^\circ$; daher hat man

$$r = \cot \frac{180^\circ}{n}$$

$$\begin{aligned}
\log s &= 3{\cdot}101 \quad 0300 \\
\log \cot \frac{180^\circ}{n} &= 0{\cdot}138 \quad 7390 \\
&\overline{1{\cdot}439 \quad 7690} \\
\log 2 &= 0{\cdot}301 \quad 0300 \\
\log r &= \overline{1{\cdot}138 \quad 7390} \\
r &= 13{\cdot}764''
\end{aligned}$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\begin{aligned}
\log s &= 1{\cdot}301 \quad 0300 \\
\log 2 &= 0{\cdot}301 \quad 0300 \\
\log \sin \frac{180^\circ}{n} &= 9{\cdot}769 \quad 2187 - 10 \\
\log R &= \overline{1{\cdot}230 \quad 7813} \\
R &= 17{\cdot}013''
\end{aligned}$$

2) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfecks sei 10□°; man berechne r und R.

Man hat folgende Rechnung:

$$f = 10, \; n = 12, \; \frac{180^\circ}{n} = 15^\circ, \; \frac{360^\circ}{n} = 30^\circ.$$

$$r = \sqrt{\frac{f}{n} \cot \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\begin{aligned}
\log f &= 1{\cdot}000 \quad 0000 \\
\log \cot \frac{180^\circ}{n} &= 0{\cdot}571 \quad 9475 \\
& 1{\cdot}571 \quad 9475 \\
\log n &= \underline{1{\cdot}079 \quad 1812} \\
& 0.492 \quad 7663 \\
\log r &= 0{\cdot}236 \quad 3831 \\
r &= 1{\cdot}7635^\circ
\end{aligned}$$

$$R = \sqrt{\frac{2f}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}}$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{\cdot}301 \quad 0300 \\
\log f &= \underline{1{\cdot}000 \quad 0000} \\
& 1{\cdot}301 \quad 0300 \\
\log n &= 1{\cdot}079 \quad 1812 \\
\log \sin \frac{360^\circ}{n} &= 9{\cdot}698 \quad 9700 - 10 \\
&\overline{ 0{\cdot}522 \quad 8788} \\
\log R &= 0{\cdot}261 \quad 4394 \\
R &= 1{\cdot}8257^\circ.
\end{aligned}$$

C. Uebungsaufgaben.

a. Formeln und Lehrsätze.

§. 216.

Wenn α, β, γ die Winkel eines Dreieckes bezeichnen, so ist

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

2) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

3) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

4) $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = -1 + 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

5) $\tang \alpha + \tang \beta + \tang \gamma = \tang \alpha \tang \beta \tang \gamma$.

6) $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$.

7) Die Summe der Quadrate der drei Seiten eines Dreieckes ist gleich

der Summe der doppelten Produkte von je zwei Seiten, jedes multiplizirt mit dem Cosinus des zwischen den zwei Seiten liegenden Winkels; nämlich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha.$$

8) Wenn man durch den Eckpunkt eines Dreieckes zu der gegenüberliegenden Seite eine beliebige Gerade zieht, so wird dieselbe in zwei Abschnitte getheilt, welche sich so zu einander verhalten, wie die Produkte aus den ihnen anliegenden Seiten in die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

b. Aufgaben.

§. 217.

1. In einem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem c die Hypothenuse, a und b die Katheten, α und β die diesen gegenüberliegenden Winkel vorstellen, ist
   a) $a = 17{\cdot}8'$, $b = 37{\cdot}5'$; man suche α, β, c;
   b) $c = 38{\cdot}7^0$, $b = 25{\cdot}8^0$; man suche α, β, a;
   c) $b = 947''$, $\alpha = 33^0\,33'\,33''$; man suche β, a, c;
   d) $c = 413{\cdot}8^0$, $\beta = 48^0\,15'$; man suche α, a, b.
2. Die Höhe h eines Gegenstandes aus der Länge l seines Schattens und aus der Höhe φ der Sonne zu finden.
3. Die Länge des Schattens eines Gegenstandes zu finden, wenn seine Höhe und die Höhe der Sonne gegeben sind.
4. Aus der Höhe eines Gegenstandes und der Länge seines Schattens die Höhe der Sonne zu bestimmen.
5. Der Mittelpunkt einer Kugel ist vom Auge 218' entfernt, und dieselbe erscheint unter einem Winkel von $4^0\,17'\,32''$; wie groß ist ihr Durchmesser?
6. Unter welchem Winkel φ sieht ein Mann, dessen Auge 5·5' über den Boden erhaben ist, einen Thurm von 184' Höhe in der Entfernung von 125'?
7. Den Winkel zu bestimmen, den die Diagonalen eines Rechteckes einschließen, wenn die Diagonale und eine Seite gegeben sind.
8. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind
   a) der Flächeninhalt und ein spitziger Winkel,
   b) der Umfang und ein spitziger Winkel,
   c) die Summe aus der Hypothenuse und einer Kathete und ein spitziger Winkel,
   d) der Unterschied zwischen der Hypothenuse und einer Kathete und ein spitziger Winkel.
9. Ein gleichschenkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind
   a) die Grundlinie und ein Schenkel,
   b) die Grundlinie und der gegenüberliegende, oder ein anliegender Winkel,
   c) ein Schenkel und der Winkel am Scheitel, oder der Winkel an der Grundlinie,

d) die Grundlinie und die Höhe,
c) ein Schenkel und die Höhe.

10. Ein schiefwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c, und die diesen gegenüberliegenden Winkel α, β, γ heißen, aufzulösen, wenn gegeben sind

a) $c = 315{\cdot}7'$, $\alpha = 58^0\,12'\,38''$, $\beta = 63^0\,15'\,15''$;
b) $a = 97{\cdot}45^0$, $\alpha = 48^0\ 8'\,43''$, $\beta = 45^0\,45'\,45''$;
c) $a = 89{\cdot}7^0$, $b = 104{\cdot}2^0$, $\gamma = 53^0\ 5'\,56''$;
d) $a = 237{\cdot}4'$, $b = 179{\cdot}8'$, $a = 72^0\,17'\,23''$;
e) $a = 419'$, $c = 328'$, $\gamma = 43^0\,51'\ 7''$;
f) $a = 2134$, $b = 3124'$, $c = 1432'$.

11. Wenn in einem Vierecke die beiden Diagonalen und ihre Neigungswinkel gegeben sind, den Flächeninhalt des Viereckes zu berechnen.

12. Den Flächeninhalt eines Viereckes zu bestimmen, in welchem vier Seiten und ein Winkel gegeben sind.

Zweiter Abschnitt.

Elemente der sphärischen Trigonometrie.

I. Relazionen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes.

§. 218.

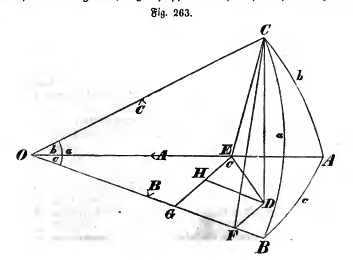
Zu jedem sphärischen Dreiecke gehört noch ein zweites, welches mit ihm die ganze Kugeloberfläche bildet; wenn übrigens nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so ist immer dasjenige sphärische Dreieck zu verstehen, welches kleiner ist als die halbe Kugeloberfläche.

Ueberdieß gehört zu jedem solchen sphärischen Dreiecke ein zweites, welches das gegebene zu der halben Kugeloberfläche ergänzt, und welches man darum das Ergänzungsdreieck des erstern zu nennen pflegt.

Aus den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes ergeben sich übrigens sogleich auch die Seiten und Winkel seines Ergänzungsdreieckes; daher wir bei unsern folgenden Untersuchungen stets nur solche sphärische Dreiecke voraussetzen wollen, die kleiner sind als der vierte Theil der Kugeloberfläche, in denen also sowohl die Seiten als die Winkel einzeln kleiner sind als 180°.

Es sei O (Fig. 263) der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser der Einheit des Längenmaßes gleich ist, und AB, AC, BC seien Bögen von

Fig. 263.



drei größten Kreisen dieser Kugel; so ist ABC ein sphärisches Dreieck. Setzen wir den Winkel BOC oder den Bogen $BC = a$, den Winkel AOC oder Bogen $AC = b$, und den Winkel AOB oder den Bogen $AB = c$; ferner bezeichnen wir die Neigung der Ebenen AOB und AOC durch A, die Neigung der Ebenen AOB und BOC durch B, und die Neigung der Ebenen AOC und BOC durch C, so stellen offenbar A, B, C die Winkel vor, welche im sphärischen Dreiecke ABC den Seiten a, b, c gegenüberliegen.

Um nun die Relazionen abzuleiten, welche zwischen den Seiten und den Winkeln des sphärischen Dreieckes Statt finden, fällen wir von C auf die Ebene AOB die Senkrechte CD, ziehen $DE \perp AO$ und verbinden C mit E durch die Gerade CE.

Weil DE die Projekzion der Geraden CE in der Ebene AOB ist, so steht die AO, welche auf der Projekzion DE senkrecht ist, auch auf der Geraden CE senkrecht und man hat, wegen $OC = 1$,

$$CE = \sin b,\ OE = \cos b$$

und in dem bei D rechtwinkligen $\triangle$ CDE, worin $\angle CED = A$ ist,

$$CD = CE \,.\, \sin A \quad \text{und} \quad DE = BE \,.\, \cos A$$

$$\text{oder} \quad CD = \sin b \,.\, \sin A \quad \text{und} \quad DE = \sin b \,.\, \cos A$$

Fällt man ferner von D die Senkrechte DF auf OB, und zieht CF, so ist DF die Projekzion der Geraden CF in der Ebene AOB, und es muß die OB, welche auf der Projekzion DF senkrecht steht, auch auf der Geraden CF senkrecht sein. Man hat somit

$$CF = \sin a,\ OF = \cos a,$$

und in dem bei D rechtwinkligen Dreiecke CDF, worin $\angle CFD = B$ ist,

$$CD = CF \,.\, \sin B \quad \text{oder} \quad CD = \sin a \,.\, \sin B.$$

Zieht man endlich $EG \perp OB$ und $DH \perp EG$, und bedenkt, daß der Winkel $DEG = AOB = c$ ist, so hat man in dem bei H rechtwinkligen Dreiecke DHE:

$$DH = DE \,.\, \sin c \quad \text{oder} \quad DH = \sin b \sin c \cos A,$$

und in dem bei G rechtwinkligen $\triangle$ EGO

$$OG = OE \,.\, \cos c \quad \text{oder} \quad OG = \cos b \cos c$$

Nun ist $OF = OG + DH$, daher auch

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \text{Auf dieselbe Art erhält man} \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{array}\right\} \text{I)}$$

Wir fanden früher $CD = \sin a \sin B$, und auch $CD = \sin b \sin A$, daher ist

$$\left.\begin{array}{l} \sin a \sin B = \sin A \sin b \\ \text{Eben so findet man} \\ \sin a \sin C = \sin A \sin c \\ \sin b \sin C = \sin B \sin c \end{array}\right\} \text{II)}$$

Wenn man in der ersten Gleichung in I) den Werth von cos c aus der dritten substituirt, so erhält man

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Bringt man $\cos a \cos^2 b$ auf die erste Seite, und bedenkt, daß

$$\cos a - \cos a \cos^2 b = \cos a (1 - \cos^2 b) = \cos a \sin^2 b$$

ist, so erhält man

$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

und wenn man durch $\sin a \sin b$ dividirt,

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \frac{\sin c}{\sin a} \cos A$$

Aus der zweiten Gleichung in II) ergibt sich aber $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, daher

$$\left.\begin{aligned}
\cot a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A. \\
&\text{Vertauscht man hier die Buchstaben, so folgt auch} \\
\cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A, \\
\cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B, \\
\cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B, \\
\cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C, \\
\cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C.
\end{aligned}\right\} \text{III)}$$

Durch Eliminazion von $\cos c$ aus der ersten und dritten Gleichung in I) erhielten wir

$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Durch die Division mit $\sin a \sin b$ ergibt sich daraus

$$\cos a \cdot \frac{\sin b}{\sin a} = \cos b \cos C + \cos A \cdot \frac{\sin c}{\sin a}.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung in II) folgt ferner

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{und} \quad \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Werden diese Werthe in der frühern Gleichung substituirt, so hat man

$$\cos a \cdot \frac{\sin B}{\sin A} = \cos b \cos C + \cos A \cdot \frac{\sin C}{\sin A},$$

oder, wenn man mit $\sin A$ multiplizirt

$$\cos a \sin B = \cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C.$$

Vertauscht man in dieser letzten Gleichung a und A mit b und B, und umgekehrt, und multiplizirt die daraus hervorgehende Gleichung

$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos^2 C + \cos B \sin C$$

mit $\cos C$, so findet man

$$\cos b \sin A \cos C = \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos C,$$

und wenn man diesen Ausdruck in dem obigen Werthe von $\cos A \sin B$ substituirt,

$$\cos a \sin B = \cos a \sin B \cos^2 C + \cos B \sin C \cos C + \cos A \sin C,$$

woraus

$$\cos A \sin C = - \cos B \sin C \cos C + \cos a \sin B (1 - \cos^2 C).$$

Beachtet man nun, daß $1 - \cos^2 C = \sin^2 C$ ist, und dividirt die Gleichung durch $\sin C$, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \\
&\text{Auf dieselbe Art erhält man auch} \\
\cos B &= - \cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\
\cos C &= - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.
\end{aligned}\right\} \text{IV)}$$

Die Ausdrücke in I), II), III) und IV) enthalten nun die wichtigsten Relazionen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes, und dienen dazu, um aus denjenigen Stücken, welche ein sphärisches Dreieck vollkommen bestimmen, die noch fehlenden zu berechnen.

Bevor wir jedoch zur Anwendung dieser Relazionen auf die Auflösung der sphärischen Dreiecke schreiten, wird es nöthig sein, den Gleichungen in den Systemen I), III) und IV) eine zu logarithmischen Berechnungen geeignete Form zu geben.

§. 219.

Um aus der ersten Gleichung in 1)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

für cos a einen Ausdruck zu erhalten, welcher sich logarithmisch behandeln läßt, dividire man die Gleichung durch cos b; man hat

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \operatorname{tang} b \sin c \cos A.$$

Führt man nun einen Hilfswinkel φ ein, indem man $\operatorname{tang} b \cos A = \operatorname{tang} \varphi$ setzt, so erhält man

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \sin c \operatorname{tang} \varphi = \cos c + \sin c \,.\, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \varphi + \sin c \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos (c - \varphi)}{\cos \varphi},$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos b \cos (c - \varphi)}{\cos \varphi}. \\ &\text{Eben so findet man} \\ \cos b &= \frac{\cos c \cos (a - \psi)}{\cos \psi}, \\ \cos c &= \frac{\cos a \cos (b - \omega)}{\cos \omega}, \end{aligned}\right\} \text{I a)}$$

wenn $\operatorname{tang} c \cos B = \operatorname{tang} \psi$ und $\operatorname{tang} a \cos C = \operatorname{tang} \omega$ gesetzt wird.

Um aber aus der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

für den Winkel A eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man zunächst

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

daher

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c},$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Bedenkt man nun, daß

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}, \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

und allgemein

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

ist, so gehen die letzteren Gleichungen über in

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c},$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c}},\\
\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}}.
\end{aligned}\right.$$

Eben so erhält man auch

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin c}},\\
\sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin c}},\\
\cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin b}},\\
\sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin b}}.
\end{aligned}\right\} \text{Ib)}$$

§. 220.

Mit Hilfe dieser letzten Formeln wird es nun leicht sein, auch die Gleichungen des Systems III) durch logarithmisch brauchbare zu ersetzen. Es ist nämlich

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin b}}$$

$$= \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin c}\cdot\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin b}}$$

$$= \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin c}\cdot\sin\frac{C}{2},$$

daher

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{a+b+c}{2} - \sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin c} \cdot \sin\frac{C}{2}.$$

Nun ist

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A+B}{2},$$

ferner

$$\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2},$$

und allgemein

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

folglich

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

oder

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Eben so kann man finden

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Dividirt man von diesen Gleichungen die dritte durch die erste, und die vierte durch die zweite, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\cot\frac{C}{2}, \\ \tan\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\cot\frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \text{III a)}$$

Wird dagegen die zweite Gleichung durch die erste, und die vierte durch die dritte dividirt, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \cdot \operatorname{tang}\frac{c}{2}, \\ \operatorname{tang}\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \cdot \operatorname{tang}\frac{c}{2}. \end{aligned}\right\} \text{III b)}$$

Die letzten vier Gleichungen sind unter dem Namen der **Neper'schen Analogien** bekannt.

§. 221.

Wir haben nun noch die Formeln des Systems IV) logarithmisch einzurichten. Wir wollen aus der Gleichung

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

zunächst einen logarithmisch brauchbaren Werth für A suchen. Es folgt daraus

$$\frac{\cos A}{\cos B} = -\cos C + \sin C \operatorname{tang} B \cos a.$$

Setzen wir nun $\operatorname{tang} B \cos a = \cot x$, und bestimmen x so, daß dieser Gleichung Genüge geleistet wird, so haben wir

$$\frac{\cos A}{\cos B} = -\cos C + \sin C \cot x = \frac{-\cos C \sin x + \sin C \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin(C-x)}{\sin x},$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cos B \,.\, \frac{\sin(C-x)}{\sin x}, \\ &\text{Eben so findet man} \\ \cos B &= \cos C \,.\, \frac{\sin(A-y)}{\sin y}, \\ \cos C &= \cos A \,.\, \frac{\sin(B-z)}{\sin x}, \end{aligned}\right\} \text{IV a)}$$

wenn $\operatorname{tang} C \cos b = \cot y$ und $\operatorname{tang} A \cos c = \cot z$ gesetzt wird.

Um endlich aus der Gleichung

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

für a eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C},$$

daher

$$1 + \cos a = \frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C} = \frac{\cos(B-C) + \cos A}{\sin B \sin C},$$

$$1 - \cos a = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C - \cos A}{\sin B \sin C} = \frac{-\cos(B+C) - \cos A}{\sin B \sin C}.$$

Nun ist

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}, \quad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2},$$

und allgemein

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Die letztern zwei Gleichungen gehen somit in die folgenden über:

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin B\sin C},$$

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}{\sin B\sin C},$$

daher

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin B\sin C}},\\
\sin\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}{\sin B\sin C}}\\
&\text{Eben so findet man}\\
\cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}}{\sin A\sin C}},\\
\sin\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin A\sin C}},\\
\cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin A\sin B}},\\
\sin\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}}{\sin A\sin B}}.
\end{aligned}\right\} \text{IV b)}$$

§. 222.

Aus den oben entwickelten Formeln

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

und

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

lassen sich für sphärische Dreiecke, die kleiner sind als der vierte Theil der Kugeloberfläche, sehr wichtige Folgerungen ableiten.

Da $\frac{c}{2}$ und $\frac{C}{2}$ kleiner als 90° sein müssen, so sind ihre Sinus und Cosinus stets positiv, und es folgt daher aus der ersten Formel, daß $\sin\frac{A-B}{2}$ und $\sin\frac{a-b}{2}$ stets gleichbezeichnet sein müssen.

Für $a=b$ ist $\sin\frac{a-b}{2}=0$, daher muß auch $\sin\frac{A-B}{2}=0$, und weil $\frac{A-B}{2}$ stets kleiner als 180° ist, $\frac{A-B}{2}=0$, also $A=B$ sein. Gleichen Seiten liegen also auch gleiche Winkel gegenüber.

Umgekehrt läßt sich folgern: wenn $A=B$ ist, so muß auch $a=b$ sein, d. h. gleichen Winkeln stehen gleiche Seiten gegenüber.

Ist $a>b$, so ist $\sin\frac{a-b}{2}$ positiv, daher muß auch $\sin\frac{A-B}{2}$ positiv, und somit $A>B$ sein. Der größern Seite liegt also auch ein größerer Winkel gegenüber.

Umgekehrt läßt sich zeigen: wenn $A>B$ ist, so muß auch $a>b$ sein, d. h. dem größern Winkel steht eine größere Seite gegenüber.

Aus der zweiten der beiden obigen Formeln folgt, daß auch $\cos\frac{A+B}{2}$ und $\cos\frac{a+b}{2}$ stets gleichbezeichnet sein müssen. Ist daher $a+b \gtreqless 180^\circ$, also $\cos\frac{a+b}{2} \lesseqgtr 0$, so muß auch $\cos\frac{A+B}{2} \lesseqgtr 0$, somit $A+B \gtreqless 180^\circ$ sein. Wenn also die Summe zweier Seiten größer, gleich oder kleiner ist als 180°, so ist auch die Summe der gegenüberliegenden Winkel beziehungsweise größer, gleich oder kleiner als 180°.

Eben so kann man folgern: wenn $A+B \gtreqless 180^\circ$ ist, so muß auch $a+b \gtreqless 180^\circ$ sein.

II. Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 223.

Ein sphärisches Dreieck kann einen, zwei oder auch drei rechte Winkel enthalten. Sind alle drei Winkel eines sphärischen Dreieckes rechte, so sind die drei Seiten Quadranten; kommen zwei rechte Winkel vor, so stehen denselben ebenfalls Quadranten gegenüber, und die dritte Seite muß eben so viele Grade enthalten, wie der dritte Winkel. Diese beiden Fälle geben also zu keiner Aufgabe Anlaß, und es brauchen hier nur solche sphärische Dreiecke betrachtet zu werden, welche bloß einen rechten Winkel enthalten.

Die auflösenden Gleichungen für solche Dreiecke ergeben sich aus den vier oben abgeleiteten Systemen, wenn man darin einen Winkel, z. B. $A = 90^\circ$ setzt; und zwar reichen in allen Fällen jene Formeln hin, welche den Winkel A enthalten, und somit durch die Substitution $A = 90^\circ$ eine einfachere Gestalt annehmen. Man bekommt

aus I) $\cos a = \cos b \cos c$ 1)

aus II) $\sin a \sin B = \sin b$ 2)
$\sin a \sin C = \sin c$ 3)

aus III) $\cot a \tang b = \cos C$ 4)
$\cot a \tang c = \cos B$ 5)
$\cot b \sin c = \cot B$ 6)
$\cot c \sin b = \cot C$ 7)

aus IV) $\cot B \cot C = \cos a$ 8)
$\cos B = \sin C \cos b$ 9)
$\cos C = \sin B \cos c$ 10)

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man, wenn außer dem rechten Winkel noch zwei Stücke gegeben sind, die noch fehlenden Stücke des sphärischen Dreieckes bestimmen.

Aus der Gleichung $\cos B = \sin C \cos b$ folgt, daß $\cos B$ und $\cos b$ stets gleichbezeichnet sein müssen. Wenn also $b \gtreqless 90^\circ$, daher $\cos b \lesseqgtr 0$ ist, so muß auch $\cos B \lesseqgtr 0$, somit $B \gtreqless 90^\circ$ sein.

Eben so folgt: Wenn $B \gtreqless 90^\circ$ ist, so muß auch $b \gtreqless 90^\circ$ sein.

Auflösungsfälle.

§. 224.

1) **Es seien die beiden Katheten b und c gegeben; man suche die Hypothenuse a und die Winkel B und C.**

Hier geben die Gleichungen 1), 6) und 7), nämlich

$\cos a = \cos b \cos c$, $\cot B = \cot b \sin c$, $\cot C = \cot c \sin b$

die verlangten drei Stücke.

Es sei z. B. $b = 27^\circ 28' 36''$ und $c = 51^\circ 12' 8''$. Man hat

$$\begin{aligned} \log\cos b &= 9{\cdot}948\ \ 0210 - 10 \\ \log\cos c &= 9{\cdot}796\ \ 9721 - 10 \\ \hline \log\cos a &= 9{\cdot}744\ \ 9931 - 10 \\ a &= 56^\circ 13' 21'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cot b &= 0{\cdot}283\ \ 9553 \\ \log\sin c &= 9{\cdot}891\ \ 7393 - 10 \\ \hline \log\cot B &= 0{\cdot}175\ \ 6946 \\ B &= 33^\circ 42' 51'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cot c &= 9{\cdot}905\ \ 2537 - 10 \\ \log\sin b &= 9{\cdot}664\ \ 0657 - 10 \\ \hline \log\cot C &= 9{\cdot}569\ \ 3194 - 10 \\ C &= 69^\circ 38' 51''. \end{aligned}$$

§. 225.

In den folgenden Fällen wollen wir, ohne die ohnehin einfache Rechnung an besondern Beispielen durchzuführen, uns mit der bloßen Anführung der auflösenden Gleichungen und mit der Untersuchung, ob das Dreieck in dem jedesmaligen Falle vollkommen bestimmt ist, begnügen.

2) Die Hypothenuse a und eine Kathete b seien gegeben; die andere Kathete c und die Winkel B und C zu finden.

Hier sind die Formeln 1), 2) und 4) anzuwenden, aus denen

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \cot a \tang b$$

folgt. Obwohl zu sin B im Allgemeinen zwei Winkel gehören, ein spitziger und ein stumpfer, so fällt doch hier jede Unbestimmtheit hinweg, da $B \gtrless 90^0$ angenommen werden muß, je nachdem $b \gtrless 90^0$ gegeben ist.

3) Gegeben sind eine Kathete b und ihr gegenüberliegender Winkel B; man soll a, c und C finden.

Aus den Formeln 2), 6) und 9) erhält man

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\cot B}{\cot b}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b};$$

oder aus 1) und 4)

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \cos C = \cot a \tang b.$$

Wenn a gefunden wurde, so können daraus mittelst der Gleichungen für cos c und cos C die Werthe für c und C unzweideutig bestimmt werden; allein zur Bestimmung von a kennt man nur den Sinus von a, darum ist diese Aufgabe eine unbestimmte. Jedoch kann auch hier in besondern Fällen das Dreieck vollkommen bestimmt sein, was wir sofort untersuchen wollen.

Ist $B = 90^0$, so ist $A + B = 180^0$, daher auch $a + b = 180^0$, und weil $b = 90^0$ ist, auch $a = 90^0$, somit das Dreieck bestimmt.

Wenn $B < 90^0$, also $A + B < 180^0$ ist, so muß auch $a + b < 180^0$, daher wegen $b < 90^0$, $a \gtrless 90^0$ sein; das Dreieck ist somit unbestimmt, ausgenommen, wenn für die Annahme, daß a stumpf ist, $a + b \gtreqless 180^0$ ausfallen würde, in welchem Falle man a nur spitzig annehmen kann.

Ist endlich $B > 90^0$, also $A + B > 180^0$, so muß auch $a + b > 180^0$ sein, wegen $b > 90^0$ kann dann $a \gtrless 90^0$ ausfallen und das Dreieck ist unbestimmt, ausgenommen, wenn der spitzige Winkel a so klein ist, daß $a + b \lesseqgtr 180^0$ ausfallen würde, wo dann a nothwendig stumpf angenommen werden müßte.

4) Gegeben sind eine Kathete b und ihr anliegender Winkel C; man suche a, c und B.

Die Formeln 4), 7) und 9) geben

$$\cot a = \frac{\cos C}{\tang b}, \quad \cot c = \frac{\cot C}{\sin b}, \quad \cos B = \sin C \cos b.$$

5) Die Hypothenuse a und ein anliegender Winkel B seien gegeben; man soll b, c und B finden.

Aus den Formeln 2), 5) und 8) folgt

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \tang c = \frac{\cos B}{\cot a}, \quad \cot C = \frac{\cos a}{\cot B}.$$

Hier ist b durch sin b vollkommen bestimmt, da man $b \gtrless 90^0$ annehmen muß, je nachdem $B \gtrless 90^0$ ist.

6) Die beiden schiefen Winkel B und C seien gegeben; man finde die Seiten a, b, c.

Mittelst der Relazionen 8), 9) und 10) erhält man

$$\cos a = \cot B \cot c, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

III. Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 226.

1. Fall. Es sei eine Seite c mit den ihr anliegenden Winkeln A und B gegeben; man soll a, b und C finden.

Die zwei Seiten a und b ergeben sich aus den Gleichungen des Systems III b)

$$\tang \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \tang \frac{c}{2},$$

$$\tang \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \tang \frac{c}{2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels C erhält man aus dem Systeme II)

$$\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a},$$

oder aus dem Systeme III a)

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot \tang \frac{A-B}{2}.$$

Es sei z. B. $A = 158^0 14' 16''$, $B = 21^0 17' 22''$, $c = 73^0 15' 20''$. Man hat

$A + B = 179^0 31' 38''$ $\quad A - B = 136^0 56'' 54'$ $\quad \frac{c}{2} = 36^0 37' 40''$

$\frac{A+B}{2} = 89^0 45' 49''$ $\quad \frac{A-B}{2} = 68^0 28' 27''$

$\log \cos \frac{A-B}{2} =$	9·564 5721	$\log \sin \frac{A-B}{2} =$	9·968 6007
$\log \tang \frac{c}{2} =$	9·871 2331	$\log \tang \frac{c}{2} =$	9·871 2331
	9·435 8052		9·839 8338

$$\log\cos\frac{A+B}{2} = 7{\cdot}615 \quad 5005$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{a+b}{2} = 1{\cdot}820 \quad 3047$$
$$\frac{a+b}{2} = 89^\circ 8'$$
$$\frac{a-b}{2} = 34^\circ 40'$$
$$a = 123^\circ 48'$$
$$b = 54^\circ 28'$$

$$\log\sin\frac{A+B}{2} = 9{\cdot}999 \quad 9963$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{a+b}{2} = 9{\cdot}839 \quad 8375$$
$$\frac{a-b}{2} = 34^\circ 40'$$
$$\log\sin A = 9{\cdot}569 \quad 0876$$
$$\log\sin c = 9{\cdot}981 \quad 1838$$
$$9{\cdot}550 \quad 2714$$
$$\log\sin a = 9{\cdot}919 \quad 5929$$
$$\log\sin C = 9{\cdot}630 \quad 6785$$
$$C = 25^\circ 17' 34''.$$

§. 227.

2. Fall. Eine Seite a, ein anliegender Winkel B und der gegenüberliegende A seien gegeben; man suche b, c und C.

Für die Seite b findet man aus dem Systeme II)

$$\sin b = \frac{\sin B \ \sin a}{\sin a}.$$

Hier kann b im Allgemeinen spitzig oder stumpf sein und die Aufgabe ist unbestimmt; nur unter besondern Voraussetzungen kann das Dreieck ein vollkommen bestimmtes sein.

Es sei erstlich $a = 90^\circ$. Für $A + B = 180^\circ$ ist auch $a + b = 180^\circ$, also $b = 90$, und das Dreieck bestimmt. Für $A + B < 180^\circ$ ist auch $a + b < 180^\circ$, daher $b < 90^\circ$, und das Dreieck ebenfalls bestimmt. Für $A + B > 180^\circ$ endlich, wo auch $a + b > 180^\circ$, und somit $b > 90^\circ$ sein muß, ist die Aufgabe gleichfalls bestimmt.

Es sei ferner $a < 90^\circ$. Für $A + B \gtreqqless 180^\circ$ muß auch $a + b \gtreqqless 180^\circ$, somit $b > 90^\circ$ sein, so daß die Aufgabe nur eine Auflösung zuläßt. Für $A + B < 180^\circ$ aber, und somit $a + b < 180^\circ$, kann $b \gtrless 90^\circ$ sein, und das Dreieck ist unbestimmt, wenn nicht der stumpfe Winkel b so groß ist, daß $a + b \gtreqqless 180^\circ$ wäre, was immer eintritt, wenn $B \leqq A$ ist; in diesem Falle darf also b nur spitzig genommen werden.

Ist endlich $a > 90^\circ$, so hat man für $A + B \lesseqqgtr 180^\circ$ auch $a + b \lesseqqgtr 180^\circ$, und somit $b < 90^\circ$; das Dreieck ist also bestimmt. Wenn dagegen $A + B > 180^\circ$ und daher auch $a + b > 180^\circ$ ist, so kann $b \gtrless 90^\circ$ sein, und das Dreieck ist unbestimmt, ausgenommen, wenn der spitzige Winkel b so klein ist, daß $a + b \lesseqqgtr 180^\circ$ wäre, was für $B \lesseqgtr A$ geschieht, in welchem Falle dann b nur stumpf sein kann.

Das Dreieck ist also in diesem Auflösungsfalle unbestimmt, wenn

$$a < 90^\circ, \quad A + B < 180^\circ \quad \text{und} \quad A < B,$$

oder

$$a > 90^\circ, \quad A + B > 180^\circ \quad \text{und} \quad A > B \ \text{ist.}$$

Ist einmal b bestimmt, so erhält man für die Berechnung von c und C aus den Systemen III b) und III a) die Ausdrücke

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} \operatorname{tang}\frac{a-b}{2},$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\,\tang\frac{A-B}{2}.$$

Es sei z. B. $A = 57^\circ\,38'$, $B = 31^\circ\,12''$, $a = 104^\circ\,25'\,30''$.
Man hat zuerst

$$\begin{array}{rcl}
\log\sin B & = & 9{\cdot}714 \quad 3524 \\
\log\sin a & = & 9{\cdot}986 \quad 0883 \\ \hline
 & & 9{\cdot}700 \quad 4407 \\
\log\sin A & = & 9{\cdot}926 \quad 6714 \\ \hline
\log\sin b & = & 9{\cdot}773 \quad 7693 \\
b & = & 36^\circ\,26'\,23''.
\end{array}$$

Da hier $a > 90^\circ$, $A + B < 180^\circ$, somit auch $a + b < 180^\circ$ ist, so muß $b < 90^\circ$ sein.
Ferner hat man

$$A + B = 88^\circ\,50' \qquad \frac{A+B}{2} = 44^\circ\,25'$$

$$A - B = 26^\circ\,26' \qquad \frac{A-B}{2} = 13^\circ\,13'$$

$$a + b = 140^\circ\,51'\,53'' \qquad \frac{a+b}{2} = 70^\circ\,25'\,56{\cdot}5''$$

$$a - b = 67^\circ\,59'\,7'' \qquad \frac{a-b}{2} = 33^\circ\,59'\,33{\cdot}5''$$

$$\begin{array}{rcl}
\log\sin\frac{A+B}{2} & = & 9{\cdot}845 \quad 0181 \\
\log\tang\frac{a-b}{2} & = & 9{\cdot}828 \quad 7625 \\ \hline
 & & 9{\cdot}673 \quad 7806 \\
\log\sin\frac{A-B}{2} & = & 9{\cdot}359 \quad 1409 \\ \hline
\log\tang\frac{c}{2} & = & 0{\cdot}314 \quad 6397 \\
\frac{c}{2} & = & 64^\circ\,8'\,46{\cdot}9'' \\
c & = & 128^\circ\,17'\,33{\cdot}8''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\log\sin\frac{a+b}{2} & = & 9{\cdot}974 \quad 1647 \\
\log\tang\frac{A-B}{2} & = & 9{\cdot}370 \quad 7994 \\ \hline
 & & 9{\cdot}344 \quad 9641 \\
\log\sin\frac{a-b}{2} & = & 9{\cdot}747 \quad 4789 \\ \hline
\log\cot\frac{C}{2} & = & 9{\cdot}597 \quad 4852 \\
\frac{C}{2} & = & 68^\circ\,24'\,21{\cdot}3'' \\
C & = & 136^\circ\,48'\,42{\cdot}6''
\end{array}$$

§. 228.

3. Fall. Zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C sind gegeben; man soll c, A, B finden.

Die Winkel A und B ergeben sich aus den Gleichungen des Systems III a)

$$\tang\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\,.\,\cot\frac{C}{2},$$

$$\tang\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2}.$$

Für die Seite c erhält man dann aus dem Systeme II) die Gleichung

$$\sin c = \frac{\sin C \sin a}{\sin A},$$

oder aus dem Systeme III b) die Gleichung

$$\tang\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} \cdot \tang\frac{a-b}{2}.$$

Sei z. B. $a = 97^\circ 30' 20''$, $b = 55^\circ 12' 10''$, $C = 39^\circ 58'$,

$a + b = 152^\circ 42' 30''$ $\quad a - b = 42^\circ 18' 10''$ $\quad \frac{C}{2} = 19^\circ 59'$

$\frac{a+b}{2} = 76^\circ 21' 15''$ $\quad \frac{a-b}{2} = 21^\circ 9' 5''$

$\log\cos\frac{a-b}{2}$	$= 9{\cdot}969 \; 7095$	$\log\sin\frac{a-b}{2}$	$= 9{\cdot}557 \; 3068$
$\log\cot\frac{C}{2}$	$= 0{\cdot}439 \; 3273$	$\log\cot\frac{C}{2}$	$= 0{\cdot}439 \; 3273$
	$0{\cdot}409 \; 0368$		$9{\cdot}996 \; 6341$
$\log\cos\frac{a+b}{2}$	$= 9{\cdot}372 \; 7639$	$\log\sin\frac{a+b}{2}$	$= 9{\cdot}987 \; 5647$
$\log\tang\frac{A+B}{2}$	$= 1{\cdot}036 \; 2629$	$\log\tang\frac{A-B}{2}$	$= 0{\cdot}009 \; 0694$
$\frac{A+B}{2}$	$= 84^\circ 44' 39{\cdot}1''$	$\frac{A-B}{2}$	$= 45^\circ 35' 53{\cdot}6''$

$\frac{A-B}{2} = 45^\circ 35' 53{\cdot}6''$

$A = 130^\circ 20' 32{\cdot}7''$

$B = 39^\circ 8' 45{\cdot}5''$

$\log\sin C = 9{\cdot}807 \; 7662$

$\log\sin a = 9{\cdot}990 \; 2630$

$9{\cdot}804 \; 0292$

$\log\sin A = 9{\cdot}882 \; 0628$

$\log\sin c = 9{\cdot}921 \; 9664$

$c = 56^\circ 40' 19''.$

§. 229.

4. Fall. **Zwei Seiten a, b und ein gegenüberliegender Winkel A seien gegeben; man soll c, B und C finden.**

Für den Winkel B gibt das System II) den Ausdruck

$$\sin B = \frac{\sin A \sin B}{\sin a}.$$

Die Werthe von c und C geben dann die Gleichungen der Systeme III b) und III a)

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} \cdot \operatorname{tang}\frac{a-b}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}} \cdot \operatorname{tang}\frac{A-B}{2}.$$

Diese Aufgabe bietet, da B aus $\sin B$ zu bestimmen ist, nur in besondern Fällen eine bestimmte Auflösung.

Für $A = 90^\circ$ und $a + b \gtreqless 180^\circ$ ist auch $A + B \gtreqless 180^\circ$, und somit $B \gtreqless 90^\circ$, also das Dreieck bestimmt.

Ist $A < 90^\circ$, und $a + b \geqq 180^\circ$, so ist auch $A + B \geqq 180^\circ$, und daher $B > 90^\circ$; der Werth von B ist also unzweideutig bestimmt. Wäre aber $a + b < 180^\circ$, also auch $A + B < 180^\circ$, so könnte B spitzig oder stumpf sein, außer wenn der stumpfe Winkel B so groß ist, daß $A + B \geqq 180^\circ$ wäre, was für $b \leqq a$ eintritt; in diesem Falle kann nur $B < 90^\circ$ sein.

Wenn endlich $A > 90^\circ$ ist, so hat man für $a + b \leqq 180^\circ$ auch $A + B \leqq 180^\circ$, daher $B < 90^\circ$; die Auflösung ist also in diesem Falle bestimmt. Für $a + b > 180^\circ$ dagegen hat man auch $A + B > 180^\circ$, also $B \gtrless 90^\circ$; das Dreieck ist somit unbestimmt, ausgenommen, wenn der spitzige Winkel B so klein wäre, daß $A + B \leqq 180^\circ$ ausfiele, welches immer eintritt, wenn $b \geqq a$ ist; in diesem Falle kann für B nur der stumpfe Winkel angenommen werden.

In diesem Auflösungsfalle ist demnach das sphärische Dreieck unbestimmt, wenn

$$A < 90^\circ,\quad a + b < 180^\circ,\quad \text{und}\quad a < b$$

oder

$$A > 90^\circ,\quad a + b > 180^\circ,\quad \text{und}\quad a > b \text{ ist.}$$

Nimmt man z. B. $a = 45^\circ$, $b = 25^\circ$, $A = 92^\circ\,1''\,9{\cdot}8''$ an, so findet man durch ähnliche Rechnungen, wie im zweiten Falle,

$$B = 36^\circ\,40'\,36{\cdot}8'', \qquad c = 37^\circ\,47'\,19{\cdot}7'', \qquad C = 60^\circ.$$

§. 230.

5. Fall. Es seien alle drei Seiten a, b, c gegeben; man suche die Winkel A, B, C.

Man wird sich hierzu der Formeln des Systems I b) bedienen.

Ist z. B. $a = 50^\circ\,54'\,32''$, $b = 37^\circ\,47'\,18''$, $c = 74^\circ\,51'\,50''$; so hat man

$$a + b + c = 136^\circ\,33'\,40'', \qquad \frac{a+b+c}{2} = 81^\circ\,46'\,50'',$$

$$-a + b + c = 61^\circ\,44'\,36'', \qquad \frac{-a+b+c}{2} = 30^\circ\,52'\,18'',$$

$a - b + c = 87^\circ 59' 4''$, $\quad \frac{a-b+c}{2} = 43^\circ 59' 32''$,

$a + b - c = 13^\circ 50'$, $\quad \frac{a+b-c}{2} = 6^\circ 55'$.

Zur Berechnung von A hat man nun die Formeln

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b \sin c}}$$

$\log\sin\frac{a+b+c}{2} = 9{\cdot}995\ 5157$ | $\log\sin\frac{a-b+c}{2} = 9{\cdot}841\ 7118$
$\log\sin\frac{-a+b-c}{2} = 9{\cdot}710\ 2163$ | $\log\sin\frac{a+b-c}{2} = 9{\cdot}080\ 7189$
$9{\cdot}705\ 7320$ | $9\ 922\ 4307$
$\log\sin b = 9{\cdot}787\ 2806$ | $\log\sin b = 9{\cdot}787\ 2806$
$\log\sin c = 9{\cdot}984\ 6660$ | $\log\sin c = 9{\cdot}984\ 6660$
$9{\cdot}933\ 7854$ | $9{\cdot}150\ 4831$
$\log\cos\frac{A}{2} = 9{\cdot}966\ 8927$ | $\log\sin\frac{A}{2} = 9{\cdot}575\ 2415$
$\frac{A}{2} = 22^\circ\ 5' 20{\cdot}4''$ | $\frac{A}{2} = 22^\circ\ 5' 20{\cdot}4''$
$A = 44^\circ 10' 40{\cdot}8''$ | $A = 44^\circ 10' 40{\cdot}8''$

Den Winkel B findet man aus den Gleichungen

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin c}}$$

$\log\sin\frac{a+b+c}{2} = 9{\cdot}995\ 5157$ | $\log\sin\frac{-a+b+c}{2} = 9{\cdot}710\ 2163$
$\log\sin\frac{a-b+c}{2} = 8{\cdot}841\ 7118$ | $\log\sin\frac{a+b-c}{2} = 9{\cdot}080\ 7189$
$9{\cdot}837\ 2275$ | $8{\cdot}790\ 9352$
$\log\sin a = 9{\cdot}889\ 9425$ | $\log\sin a = 9{\cdot}889\ 9425$
$\log\sin c = 9{\cdot}984\ 6660$ | $\log\sin c = 9{\cdot}984\ 6660$
$9{\cdot}962\ 6190$ | $8{\cdot}916\ 3267$
$\log\cos\frac{B}{2} = 9{\cdot}981\ 3095$ | $\log\sin\frac{B}{2} = 9{\cdot}458\ 1633$
$\frac{B}{2} = 16^\circ 41' 21{\cdot}3''$ | $\frac{B}{2} = 16^\circ 41' 22{\cdot}4''$
$B = 33^\circ 22' 42{\cdot}6''$ | $B = 33^\circ 22' 44{\cdot}8''$

Da der Winkel $\frac{B}{2} < 45^0$ ist, so kann man den aus dem Sinus hervorgehenden Werth von B als den genaueren ansehen.

Zur Bestimmung von C hat man

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin b}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin b}},$$

$\log\sin\frac{a+b+c}{2}$	$= 9{\cdot}995\ 5157$	$\log\sin\frac{-a+b+c}{2}$	$= 9{\cdot}710\ 2163$
$\log\sin\frac{a+b-c}{2}$	$= 9{\cdot}080\ 7189$	$\log\sin\frac{a-b+c}{2}$	$= 9{\cdot}841\ 7118$
	$9{\cdot}076\ 2346$		$9{\cdot}551\ 9281$
$\log\sin a$	$= 9{\cdot}889\ 9425$	$\log\sin a$	$= 9{\cdot}889\ 9425$
$\log\sin b$	$= 9{\cdot}787\ 2806$	$\log\sin b$	$= 9{\cdot}787\ 2806$
	$9{\cdot}399\ 0115$		$9{\cdot}874\ 7050$
$\log\cos\frac{C}{2}$	$= 9{\cdot}699\ 5057$	$\log\sin\frac{C}{2}$	$= 9{\cdot}937\ 3525$
$\frac{C}{2}$	$= 59^0 57' 33''$	$\frac{C}{2}$	$= 59^0 57' 33{\cdot}6''$
C	$= 119^0 55' 6''$	C	$= 119^0 55' 7{\cdot}2''$

Hier ist $\frac{C}{2} > 45^0$, daher der aus dem Cosinus hervorgehende Werth von C der genauere.

§. 231.

6. Fall. Es seien die drei Winkel A, B, C gegeben, und die Seiten a, b, c zu suchen.

Die gesuchten Stücke ergeben sich aus den Formeln des Systemes IV b), und zwar durch ähnliche Rechnung, wie im vorhergehenden Falle. Nimmt man z. B. $A = 107^0 48'$, $B = 52^0 30'$, $C = 38^0 58' 30''$ an, so findet man

$a = 70^0 22' 42{\cdot}6''$, $b = 51^0 42' 26''$ $c = 38^0 28' 48{\cdot}8''$.

IV. Uebungsaufgaben.

§. 232.

1. Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, worin A den rechten Winkel vorstellt, aufzulösen, wenn gegeben sind

a) $b = 127^0 58' 32''$, $c = 63^0 15' 48''$;
b) $a = 154^0 8' 15''$, $c = 81^0 18' 27''$;
c) $c = 74^0 23' 8''$, $C = 105^0 17' 35''$;

d) $b = 51^\circ 50' 2''$, $B = 78^\circ 41' 19''$;
e) $c = 83^\circ 12' 38''$, $B = 65^\circ 55' 55''$;
f) $a = 95^\circ 6' 42''$, $C = 70^\circ 49' 25''$;
g) $B = 88^\circ 13' 9''$, $C = 58^\circ 59' 22''$.

2. Ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind

a) $a = 85^\circ 13' 58''$, $B = 64^\circ 35' 32''$, $C = 71^\circ 17' 53''$;
b) $b = 57^\circ 35' 30''$, $A = 88^\circ 13' 23''$, $B = 151^\circ 11' 12''$;
c) $a = 48^\circ 23' 57''$, $A = 59^\circ 17' 44''$, $B = 75^\circ 15' 32''$;
d) $b = 83^\circ 48' 40''$, $c = 72^\circ 13' 13''$, $A = 108^\circ 5' 28''$;
e) $a = 102^\circ 13' 24''$, $c = 75^\circ 51' 21''$, $B = 65^\circ 31' 54''$;
f) $b = 126^\circ 8' 19''$, $c = 83^\circ 38' 7''$, $B = 96^\circ 52' 41''$;
g) $a = 137^\circ 28' 37''$, $b = 55^\circ 57' 8''$, $c = 88^\circ 17' 35''$;
h) $A = 70^\circ 18' 15''$, $B = 48^\circ 17' 10''$, $C = 94^\circ 40' 27''$.

3. Wenn die Höhe h, das Azimuth w eines Gestirns und die Polhöhe φ des Beobachtungsortes gegeben sind, daraus die Deklinazion δ und den Stundenwinkel s des Gestirns zu finden.

4. Gegeben sind δ, s und φ; man suche h und w.

5. Gegeben sind h, δ und φ; man suche s und w.

6. Die geographische Lage dreier Orte der Erde ist gegeben; man suche die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des durch jene Orte gelegten sphärischen Dreieckes

7. Aus den drei zusammenstoßenden Kanten a, b, c eines schiefwinkligen Parallelepipeds und den Winkeln α, β, γ, welche jene Seiten mit einander bilden, den Inhalt des Parallelepipeds zu bestimmen.

Man findet

$$P = 2abc \, . \sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}.$$

8. Ein reguläres Polyeder wird von p nseitigen Polygonen, von denen je m in einer Ecke zusammenstoßen, und deren Seite a ist, eingeschlossen; man suche

a) den Winkel φ zwischen zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Polyeders zum Eckpunkte und zur Mitte einer Seite gezogen werden;
b) den Winkel ψ zwischen zwei Geraden, welche zur Mitte einer Seitenkante und zum Mittelpunkte der dazu gehörigen Seitenfläche gezogen werden;
c) den Winkel w zwischen den zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Polyeders zum Mittelpunkte einer Seitenfläche und zu einem Eckpunkte gezogen werden;
d) den Neigungswinkel N zweier in einer Kante zusammenstoßender Seitenflächen;
e) den Halbmesser r der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel, d. i. die Entfernung des Mittelpunktes des Polyeders von einer Seitenfläche;
f) den Halbmesser R der dem Polyeder umschriebenen Kugel, d. i. die Entfernung des Mittelpunktes des Polyeders von einer Ecke;

g) die Oberfläche O;
h) den Körperinhalt K des Polyeders.
Man findet

a) $\cos\varphi = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{m}}$,

b) $\cos\psi = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$,

c) $\cos\omega = \cos\varphi\cos\psi = \cot\frac{180^\circ}{m}\cot\frac{180^\circ}{n}$,

d) $\sin\frac{N}{2} = \cos\psi = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$,

e) $r = \frac{a}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}\tang\frac{N}{2}$,

f) $R = \frac{a}{2}\tang\frac{180^\circ}{m}\tang\frac{N}{2}$,

g) $O = \frac{npa^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$,

h) $K = \frac{npa^3}{24}\cot\frac{180^\circ}{m}\cot\frac{180^\circ}{n}\tang\frac{N}{2}$.

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

§. 233.

Durch das Messen der Raumgrößen wird das Verhältniß derselben zu den gleichartigen Maßeinheiten gefunden. Daraus folgt, daß sich die Linien, Flächen und Körper durch Zahlen ausdrücken lassen, welche allgemein durch Buchstaben dargestellt werden. So ist z. B. $\sqrt{2}$ die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen jede Kathete 1 ist; $3 \cdot 4 = 12$ die Fläche eines Rechteckes, dessen Seiten 3 und 4 sind; $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen zusammenstoßende Seiten 3, 4, 5 sind. Enthält die Seite eines Würfels a Längeneinheiten, so ist a^2 eine Seitenfläche und a^3 der Inhalt des Würfels. Sind a, b, c die Zahlen, welche anzeigen, wie oft die Längeneinheit in den zusammenstoßenden Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds enthalten ist, so sind ab, ac, bc die Seitenflächen und abc der Inhalt eines solchen Körpers.

Lassen sich aber die Raumgrößen algebraisch darstellen, so ist es von selbst klar, daß man geometrische Größen in algebraische Rechnung ziehen und dadurch auch bei geometrischen Untersuchungen die Algebra anwenden kann. Die Trigonometrie selbst kann schon als eine solche Anwendung der Algebra betrachtet werden.

Wir werden uns in dem Nachfolgenden mit der Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben, und was von besonderer Wichtigkeit ist, auf die Bestimmung der Lage der Raumgrößen beschäftigen. Diese letztere Anwendung bildet den Gegenstand der analytischen Geometrie, von welcher wir jedoch in dieser Abhandlung nur jenen Theil vornehmen werden, welcher sich mit der Bestimmung der Punkte und Linien in der Ebene befaßt.

Erster Abschnitt.

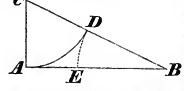
Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben.

§. 234.

Die Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben ist oft so leicht, daß es hierzu gar nicht besonderer Regeln bedarf, wie wir dieses sogleich an folgendem Beispiele sehen wollen.

Es soll eine gegebene Gerade AB (Fig 264) im äußern und mittlern Verhältnisse getheilt werden.

Fig. 264.



Um diese Aufgabe algebraisch aufzulösen, muß zuerst die Linie AB durch eine Zahl ausgedrückt werden. Es sei a die Zahl, welche anzeigt, wie viele Längeneinheiten die Gerade AB enthält; der größere Abschnitt enthalte x Längeneinheiten, so werden ihrer auf den kleinern Abschnitt $a - x$ kommen. Der Bedingung der Aufgabe zu Folge muß nun

$$a : x = x : a - x$$

oder

$$x^2 = a^2 - ax$$

sein, woraus

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

folgt. Da nun der gesuchte größere Abschnitt offenbar nur eine positive Größe sein kann, so ist von den beiden Werthen von x der zweite nicht brauchbar, und die Aufgabe führt auf die einzige Auflösung

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Führt man nun die in diesem Ausdrucke angezeigten Rechnungen aus, und trägt die für x gefundene Zahl Längeneinheiten von B bis E auf, so ist E der Punkt, in welchem AB im mittlern und äußern Verhältnisse getheilt wird.

Es ist übrigens gar nicht nöthig, jene Rechnungen wirklich auszuführen, was sich oft nur näherungsweise thun läßt; man darf nur die geometrische Bedeutung des für x erhaltenen Ausdruckes ins

Auge fassen, um sofort den Punkt E durch eine ganz einfache geometrische Konstrukzion zu erhalten.

Die Größe $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ bedeutet bekanntlich die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und $\frac{a}{2}$ sind. Errichtet man daher in A eine Senkrechte, trägt darauf $AC = \frac{a}{2}$ auf und zieht CB, so ist

$$CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Von dieser Größe ist, um den Werth von x zu erhalten, noch $\frac{a}{2}$ abzuziehen. Beschreibt man also aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ den Bogen AD, so ist $CD = \frac{a}{2}$, daher

$$BD = CB - CD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = x.$$

Man darf nun bloß noch auf der Geraden AB das Stück BE = BD abschneiden, so ist E der gesuchte Punkt. Man sieht, daß die algebraische Auflösung dieser Aufgabe auf dieselbe Konstrukzion führt, welche wir in der Planimetrie aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet haben.

§. 235.

Wie man aus dem vorhergehenden Beispiele sieht, kommt bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie ein dreifaches Geschäft vor: 1) müssen die Bedingungen der Aufgabe in die algebraische Zeichensprache übersetzt, oder durch eine Gleichung ausgedrückt werden; 2) wird diese Gleichung aufgelöset; und 3) muß die geometrische Bedeutung der gefundenen Formel hergestellt, oder der für die Unbekannte erhaltene Ausdruck geometrisch konstruirt werden.

Für die Uebersetzung einer geometrischen Aufgabe in die algebraische Zeichensprache gibt es keine allgemeinen Regeln; sie ist das Werk der Urtheilskraft, und erfordert oft sehr viel Scharfsinn. Als einigermaßen leitende Vorschrift kann folgende von Newton aufgestellte Regel dienen:

Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst, und vergleiche alle darin vorkommenden Größen mit einander, ohne Rücksicht darauf, ob sie bekannt oder unbekannt sind; hierauf untersuche man, wie sie von einander abhängen, um diejenigen zu erkennen, welche als gegeben zur Bestimmung anderer dienen können, und stelle aus dieser erkannten Abhängigkeit die Gleichung her.

Hat man aus den gegebenen Bedingungen einer Aufgabe dieselbe als Gleichung dargestellt, so wird diese nach den Regeln der Algebra aufgelöst, und dann der erhaltene Ausdruck geometrisch konstruirt.

Ehe wir jedoch über die geometrische Konstrukzion der algebraischen Ausdrücke handeln, wird es nöthig sein, Einiges über die Gleichartigkeit derselben voraus zu schicken.

I. Gleichartigkeit der Ausdrücke.

§. 236.

Wir haben oben bemerkt, daß die Größen a, b, c die Länge einer Linie, ab, ac, bc, a^2 eine Fläche, abc, a^3 einen Körperinhalt bedeuten. Faßt man bei diesen Größen die Potenzexponenten der Buchstaben ins Auge, so sieht man sogleich, daß die Summe der Exponenten in einem solchen Ausdrucke bei der Linie 1, bei der Fläche 2, bei dem Körper 3 ist.

Die Summe der Exponenten eines einfachen algebraischen Ausdruckes wird dessen Dimension genannt; dabei werden aber die Exponenten der darin etwa vorkommenden besondern Zahlen nicht berücksichtiget. Bei einem Bruche bestimmt man die Dimension, wenn man die Dimension des Zählers durch jene des Nenners dividirt. Die Dimension einer Potenzgröße wird gefunden, wenn man die Dimension der Wurzel mit dem Potenzexponenten multiplizirt; und die Dimension einer Wurzelgröße, wenn man die Dimension der Größe unter dem Wurzelzeichen durch den Wurzelexponenten dividirt.

Diesen Erklärungen zu Folge haben die Größen

$$a,\ 2b,\ \frac{ab}{c},\ \frac{a^2}{bc},\ \frac{3ax^2}{4bc}$$

eine Dimension; die Größen

$$ab,\ 8bc,\ \pi a^2,\ \frac{5abc}{m},\ \frac{x^3}{a},\ \left(\frac{ab}{p}\right)^2,\ \sqrt{\frac{ax^3y}{b}}$$

zwei Dimensionen; endlich die Ausdrücke

$$abc,\ ac^2,\ a^3,\ \frac{3a^2b^2}{c},\ \left(\frac{2a^2x}{3by}\right)^3,\ \sqrt{\frac{a^2b^3c^3}{py}}$$

drei Dimensionen.

Mehr als drei Dimensionen können geometrische Größen nicht haben; wohl aber kann dieses bei rein algebraischen Ausdrücken der Fall sein. So ist z. B. die Größe $8a^3bx^2$ ein Ausdruck von 6 Dimensionen.

§. 237.

Eine Gleichung oder ein Ausdruck heißt in Beziehung auf gewisse Buchstaben gleichartig oder homogen, wenn alle Glieder in Bezug auf diese Buchstaben gleich viele Dimensionen haben. So ist die Gleichung $x^2 - 2ax + a\sqrt{bc} = \frac{bx^3}{a} - cx$ in Beziehung auf die Buchstaben a, b, c, x gleichartig, weil jedes Glied zwei Dimensionen hat.

Wenn man die Linien durch Buchstaben a, b, c darstellt, und es wird keine besondere Linie als Einheit angenommen, so ist die Gleichung, auf welche man durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie geführt wird, immer in Beziehung auf diese Buchstaben gleichartig.

Diese Gleichartigkeit der Gleichung findet nicht mehr Statt, sobald eine gegebene Linie als Einheit angenommen wird, denn dann verschwinden die Faktoren und Theiler, welche dieser Linie gleich sind. So z. B. erhält man statt der gleichartigen Gleichungen $x = \frac{abc}{m^2}$, $x = \frac{ma^2}{b^2}$, wenn m als Einheit angenommen wird, die ungleichartigen Gleichungen $x = abc$, $x = \frac{a^2}{b}$. Es ist übrigens immer leicht, die Gleichartigkeit herzustellen; man darf nur die Längeneinheit durch einen Buchstaben α ausdrücken, und diesen in der nöthigen Potenz in den ungleichartigen Ausdruck als Faktor oder Theiler einführen.

Um z. B. den Ausdruck $x = ab$ gleichartig zu machen, dividire man ab durch den Buchstaben α, welcher als Linieneinheit zu Grunde gelegt wird; man erhält $x = \frac{ab}{\alpha}$. Die Buchstaben x, a, b haben jedoch nicht mehr die frühere Bedeutung; denn früher nahm man $\alpha = 1$ an, so daß x, a, b die Maße der Linien bedeuteten, während jetzt die Einheit α ganz unbestimmt bleibt, so daß man sich statt x, a, b die Größen $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\alpha}$ denken muß, wodurch der frühere ungleichartige Ausdruck $x = ab$ in jenen $\frac{x}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\alpha}$ oder $x = \frac{ab}{\alpha}$ übergehet, welcher gleichartig ist.

Wäre der Ausdruck $x = \frac{a - b^2}{cm}$ gleichartig zu machen, so bedenke man, daß x eine Linie vorstellt, somit eine Dimension hat; damit nun der Bruch $\frac{a - b^2}{cm}$ auch eine Dimension erhalte, muß man, da der Nenner zwei Dimensionen hat, dem Zähler drei Dimensionen geben, indem man a mit α^2, und b^2 mit α multiplizirt, wo α die noch unbestimmte Längeneinheit vorstellt; dadurch erhält man

$$x = \frac{a\alpha^2 - b^2\alpha}{cm}.$$

Eigentlich haben wir bei dieser Umformung nichts anderes gethan, als statt x, a, b, c, m die Größen

$$\frac{x}{\alpha},\ \frac{a}{\alpha},\ \frac{b}{\alpha},\ \frac{c}{\alpha},\ \frac{m}{\alpha}$$

eingeführt; denn durch diese Substitution geht der Ausdruck

$$x = \frac{a - b^2}{cm} \text{ über in } \frac{x}{\alpha} = \frac{\frac{a}{\alpha} - \frac{b^2}{\alpha^2}}{\frac{c}{\alpha} \cdot \frac{m}{\alpha}} \text{ oder } x = \frac{a\alpha^2 - b^2\alpha}{cm}.$$

II. Konstrukzion der Gleichungen des ersten und zweiten Grades.

§. 238.

Eine Gleichung geometrisch konstruiren, heißt den für die Unbekannte erhaltenen algebraischen Ausdruck mit Hilfe des Zirkels und Lineals durch eine Linie darstellen. Wir wollen uns hier auf die bestimmten Gleichungen des ersten und zweiten Grades beschränken, und überdieß nur gleichartige Gleichungen in Betrachtung ziehen, weil sich die andern auf solche zurückführen lassen.

1. Gleichungen des ersten Grades.

§. 239.

Bei diesen wird der Werth der Unbekannten durch lauter Durchschnitte von geraden Linien gefunden.

Jede gleichartige Gleichung des ersten Grades läßt sich auf eine der folgenden Grundformen zurückführen:

$$x = a + b, \quad x = a - b, \quad x = \frac{ab}{c},$$

die wir der Reihe nach konstruiren wollen.

Fig. 265.

1. Um die Gleichung $x = a + b$ zu konstruiren, nehme man auf einer unbestimmten Geraden AX (Fig. 265) das Stück $AB = a$, $BC = b$; so ist $AC = AB + BC = a + b = x$.

Fig. 266.

2. Um die Gleichung $x = a - b$ zu konstruiren, nehme man in der Geraden AX (Fig. 266) einen beliebigen Punkt A an, schneide $AB = a$ ab, und trage von B gegen A zurück $BC = b$ auf, so ist $AC = AB - BC = a - b = x$.

Fig. 267.

3. Soll die Gleichung $x = \frac{ab}{c}$ konstruirt werden, so darf man, da aus dieser Gleichung die Proporzion $c : b = a : x$ folgt, nur zu den Linien c, b, a die vierte Proporzionirte suchen.

Ist daher (Fig. 267) $AB = c$, $AC = b$, $AD = a$, und $DE \parallel BC$, so hat man

$$AB : AC = AD : AE \quad \text{oder} \quad c : b = a : AE,$$

somit $AE = \frac{ab}{c} = x$.

Beispiele.

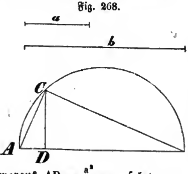
1) Es soll die Gleichung $x = a + b - c + d - e$ konstruirt werden.

Man hat $x = a + b + d - (c + e)$. Konstruirt man daher zuerst $a + b + d = A$, ferner $c + e = B$, und endlich $A - B = x$, so ist die Aufgabe gelöset.

2) Es soll die Gleichung $x = \frac{a^2}{b}$ konstruirt werden.

Aus dieser Gleichung folgt $b : a = a : x$. Man darf daher nur zu b, a, a die vierte Proporzionallinie, oder was dasselbe ist, zu b, a die dritte stetige Proporzionale bestimmen.

Fig. 268.



Für $b > a$ kann auch die folgende Konstrukzion sehr vortheilhaft angewendet werden. Man mache (Fig. 268) $AB = b$, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis, trage aus A die Linie $AC = a$ auf, und fälle von C auf AB die Senkrechte CD, so ist, wenn auch BC gezogen wird, in dem rechtwinkligen Dreiecke ACB $AB : AC = AC : AD$, oder $b : a = a : AD$, woraus $AD = \frac{a^2}{b} = x$ folgt.

3) Man konstruire die Gleichung $x = \frac{abc}{df}$.

Es ist $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{f}$. Man konstruire daher zuerst $\frac{ab}{d} = m$, so ist dann $x = \frac{mc}{f}$, welcher Ausdruck sich nun konstruiren läßt.

4) Es soll $x = \frac{abc^2}{def}$ konstruirt werden.

Man hat $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{c}{f}$, Konstruirt man daher zuerst $\frac{ab}{d} = m$, $\frac{mc}{e} = n$, endlich $\frac{nc}{f}$, so ist diese letztere Linie x selbst; denn

$$\frac{nc}{f} = \frac{mc}{e} \cdot \frac{c}{f} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{c}{f} = \frac{abc^2}{def} = x.$$

5) Man soll $x = \frac{ab + cd}{e}$ konstruiren.

Es ist $x = \frac{ab}{e} + \frac{cd}{e} = m + n$. Man konstruire daher zuerst $\frac{ab}{e} = m$, dann $\frac{cd}{e} = n$, und endlich $m + n = x$.

6) Um den Ausdruck $x = \frac{ab}{c - d}$ zu konstruiren, suche man zuerst $c - d = m$ und konstruire dann $x = \frac{ab}{m}$.

7) Sei die Gleichung $x = \frac{a^2 - b^2}{c + d}$ zu konstruiren.

Man hat $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c+d}$. Es wird also zuerst $a + b = m$ dann $a - b = n$, ferner $c + d = p$, und daraus $x = \frac{mn}{p}$ konstruirt.

8) Hat man $x = \frac{a^2 - bc^2}{de + fg}$ zu konstruiren, so setze man

$$de + fg = d\left(e + \frac{fg}{d}\right),$$

konstruire $\frac{fg}{d} = m$, dann $e + m = n$, und endlich $x = \frac{a^2 - bc^2}{dn}$.

9) Man konstruire die Gleichung $x = \frac{a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - c^2}{2a^2 + ab - c^2}$.

$$\text{Es ist } x = \frac{a^2\left(a - 2b + \frac{3b^2}{a} - \frac{c^2}{a^2}\right)}{a\left(2a + b - \frac{c^2}{a}\right)} = \frac{a\left(a - 2b + \frac{3b^2}{a} - \frac{c^2}{a^2}\right)}{2a + b - \frac{c^2}{a}}.$$

Man konstruire nun die Linien $\frac{3b^2}{a} = m$, $\frac{c^2}{a^2} = n$, $\frac{c^2}{a} = p$, ferner $a - 2b + m - n = q$, $2a + b - p = r$, und endlich $x = \frac{aq}{r}$.

2. Gleichungen des zweiten Grades.

§. 240.

a. Die reinen quadratischen Gleichungen lassen sich immer auf eine der folgenden Formen bringen:

$$x = \sqrt{ab},\ x = \sqrt{a^2 + b^2},\ x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

1. In der Gleichung $x = \sqrt{ab}$ bedeutet x die mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen a und b, und kann als solche konstruirt werden.

2. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und b sind.

3. Der dritte Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ stellt die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes vor, das a zur Hypothenuse und b zur andern Kathete hat. Man kann auch $\sqrt{a^2 - b^2}$ in $\sqrt{(a+b)(a-b)}$ zerlegen, und x somit als die mittlere Proporzionale zwischen $a + b$ und $a - b$ konstruiren.

Beispiele.

1) Man konstruire die Gleichung $x = \sqrt{\frac{a^2b}{c}}$.

Es ist $x = \sqrt{\frac{a^2}{c} \cdot b} = \sqrt{mb}$, wenn $\frac{a^2}{c} = m$ gesetzt wird.

Man konstruire also zuerst eine Linie $m = \frac{a^2}{c}$ und dann $x = \sqrt{mb}$.

2) Sei $x = \sqrt{a^2 + bc}$ zu konstruiren.

Man konstruire vorläufig $m = \sqrt{bc}$, so ist $bc = m^2$, und $x = \sqrt{a^2 + m^2}$, welcher Ausdruck nun leicht zu konstruiren ist.

3) Man konstruire $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + e^2}$.

Setzt man $a^2 + b^2 = m^2$, $m^2 - c^2 = n^2$, $n^2 - d^2 = p^2$, und konstruirt $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, $n = \sqrt{m^2 - c^2}$, $p = \sqrt{n^2 - d^2}$, so braucht man zuletzt nur noch $x = \sqrt{p^2 + e^2}$ zu konstruiren.

4) Es soll die Gleichung $x = \sqrt{ab + cd - ef}$ konstruirt werden.

Man konstruire vorläufig $m = \sqrt{ab}$, $n = \sqrt{cd}$, $p = \sqrt{ef}$; so ist dann $x = \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$, wovon die Konstrukzion bekannt ist.

5) Um die Gleichung $x = \sqrt{\frac{a^2b + c^2d}{f-g}}$ zu konstruiren, suche man zuerst die Linie $\sqrt{\frac{a^2b}{f-g}} = m$, dann $\sqrt{\frac{c^2d}{f-g}} = n$, und konstruire daraus $x = \sqrt{m^2 + n^2}$.

§. 241.

b) Jede vollständige Gleichung des zweiten Grades läßt sich unter die Form

$$x^2 \pm ax = \pm p$$

bringen. Führt man, um diese Gleichung homogen zu machen, statt p die Größe $pa = b^2$ ein, so hat man folgende vier Formen:

$$x^2 - ax = \quad b^2 \ \ldots\ 1)$$
$$x^2 + ax = \quad b^2 \ \ldots\ 2)$$
$$x^2 - ax = -\ b^2 \ \ldots\ 3)$$
$$x^2 + ax = -\ b^2 \ \ldots\ 4)$$

Die allgemeine Form, unter welcher die beiden Wurzeln jeder dieser vier Gleichungen enthalten sind, ist

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm b^2},$$

aus welchem Ausdrucke ersichtlich ist, daß sich die Wurzeln einer vermischten quadratischen Gleichung schon nach den vorhergehenden Angaben konstruiren lassen; man braucht nur

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = m \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = n$$

zu konstruiren, und dann

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm m \quad \text{oder} \quad x = \pm \frac{a}{2} \pm n$$

zu suchen.

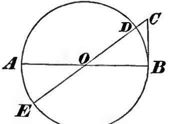
Viel einfacher lassen sich jedoch die beiden Wurzeln jeder der vier obigen Gleichungen durch eine einzige Konstrukzion erhalten.

1) Aus der Gleichung $x^2 - ax = b^2$ folgt

$$x(x-a) = b^2.$$

Man sieht nun, daß x und $x-a$ zwei Linien sind, deren Differenz a ist, und deren Rechteck dem Quadrate b^2 gleich kommt. Beschreibt man daher (Fig. 269) über dem Durchmesser $AB = a$ einen Kreis, zieht die Tangente $BC = b$, und von C aus durch den Mittelpunkt O die Sekante CDE; so sind CE und $-$ CD die beiden Werthe von x. Denn wenn jeder derselben in die Gleichung $x(x-a) = b^2$ anstatt x gesetzt wird, so wird der Gleichung Genüge geleistet, weil man in beiden Fällen zu der Gleichung $CD \cdot CE = BC^2$ geführt wird, deren Richtigkeit in der Lehre vom Kreise bewiesen wurde.

Fig. 269.



2) Die Gleichung $x^2 + ax = b^2$ geht aus der frühern $x^2 - ax = b^2$ hervor, wenn man in dieser $-x$ statt x setzt; sie hat also die Wurzeln der frühern Gleichung mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen; die Werthe von x sind also

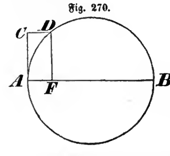
$$x = CD, \quad x = -CE.$$

3) Die Gleichung $x^2 - ax = -b^2$, wenn sie auf die Form

$$x(a-x) = b^2$$

gebracht wird, zeigt, daß x und $a-x$ zwei Linien sind, deren Summe gleich einer gegebenen Länge a, und deren Rechteck einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Fig. 270.



Beschreibt man daher (Fig. 270) über dem Durchmesser $AB = a$ einen Kreis; errichtet auf AB die Senkrechte $AC = b$, zieht $CD \parallel AB$ und $DF \perp AB$; so sind die Abschnitte AF und BF die Werthe von x. Denn sowohl AF als BF, in die Gleichung $x(a-x) = b^2$ statt x substituirt, leistet dieser Genüge, indem man in beiden Fällen auf das Resultat $AF \cdot BF = DF^2$ geführt wird, dessen Richtigkeit in der Lehre vom Kreise bewiesen wurde.

4) Die Gleichung $x^2 + ax = -b^2$ hat die Wurzeln der frühern $x^2 - ax = -b^2$ mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen; somit ist

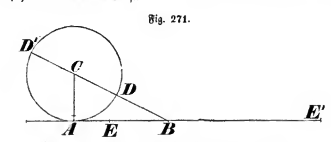
$$x = -AF \text{ oder } x = -BF.$$

III. Algebraische Auflösung von geometrischen Aufgaben.

§. 242.

1. Eine Gerade AB (Fig. 271) im Punkte E so in zwei Theile zu theilen, daß BE die mittlere Proporzionale zwischen AB und AE ist.

Fig. 271.



Diese Aufgabe fällt offenbar mit der bereits oben aufgelösten zusammen: eine Gerade AB im Punkte E im äußern und mittlern Verhältniß zu theilen. Wir wollen sie übrigens hier noch einmal vornehmen, um namentlich die Bedeutung der negativen Werthe der Unbekannten nachzuweisen. Macht man $AB = a$, $BE = x$, so ist $AE = a - x$, und man hat zur Lösung der Aufgabe die Gleichung

$$x^2 = a(a - x),$$

woraus

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \text{ folgt.}$$

Der erste Werth von x ist positiv und kleiner als a; er bestimmt also wirklich einen zwischen A und B liegenden Punkt E, wie es die Aufgabe verlangt. Er wird, wie schon oben gezeigt wurde, erhalten, wenn man in A eine Senkrechte auf AB errichtet, davon $AC = \frac{a}{2}$ abschneidet, die BC zieht, ferner aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis beschreibt, welcher die BC in D schneidet und $BE = BD$ macht; denn es ist

$$BE = BD = BC - CD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}.$$

Der zweite Werth

$$x = -\left\{\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right\}$$

ist negativ, und gibt daher für die vorgelegte Aufgabe keine Auflösung.

Würde man die Aufgabe so gestellt haben: Es soll in der Verlängerung der AB über B hinaus ein Punkt E' so bestimmt werden, daß BE' die mittlere Proporzionale zwischen

AE′ und der gegebenen Linie AB sei; so hätte man, wenn BE′ $= x$, daher AE′ $= a + x$ gesetzt wird, die Gleichung

$$x^2 = a(a + x),$$

woraus

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \text{ folgt.}$$

Der zweite dieser Werthe ist negativ und eignet sich daher nicht für diese Aufgabe. Der erste Werth

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

dagegen ist positiv und stellt die Linie BE′ = BD′ dar, welche letztere man erhält, wenn die in der frühern Aufgabe konstruirte Linie BD bis zum zweiten Durchschnitte mit dem Umfange des aus C mit dem Halbmesser CA $= \frac{a}{2}$ beschriebenen Kreises verlängert wird; denn es ist

$$BE' = BD' = CD' + BC = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Man sieht, daß die beiden hier betrachteten Aufgaben durch eine und dieselbe geometrische Konstrukzion gelöset werden; ferner sieht man, daß sich der Werth von x in der zweiten Aufgabe unmittelbar aus dem negativen Werthe von x in der ersten Aufgabe, für deren Lösung er nicht brauchbar war, herleiten läßt, wenn man nur das Vorzeichen ändert. Es enthält somit die algebraische Auflösung der ersten Aufgabe auch schon jene der zweiten in sich, sobald man den negativen Werth von x auf der AB von B aus rechts aufträgt, während der positive auf AB von B aus links aufgetragen wird; sie liefert also alle Auflösungen der in folgender Weise allgemein gestellten Aufgabe:

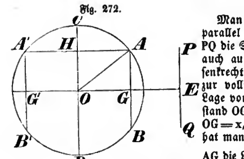
Auf einer unbegrenzten Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte A und B geht, soll ein Punkt bestimmt werden, dessen Abstand von B die mittlere Proporzionale zwischen seinem Abstande von A und der gegebenen Entfernung AB sei.

Wird überhaupt die Algebra zur Auflösung einer geometrischen Aufgabe angewendet, und man nimmt als Unbekannte auf einer gegebenen Linie eine Entfernung, die von einem festen Punkte nach einer bestimmten Richtung ausgeht, so müssen die negativen Werthe der Unbekannten nach einer der frühern entgegengesetzten Richtung genommen werden.

Zugleich sieht man, daß die negativen Werthe zur Aufhebung der Beschränkung, die in eine Aufgabe gelegt wurde, somit zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe dienen.

§. 243.

2. Es soll in einem Kreise eine Sehne AB (Fig. 272) von bestimmter Länge gezogen werden, die mit einer der Länge nach gegebenen Geraden PQ parallel läuft.



Man ziehe den Durchmesser CD parallel mit PQ, und fälle von O auf PQ die Senkrechte OE, so muß diese auch auf der gesuchten Sehne AB senkrecht stehen, und es handelt sich zur vollkommenen Bestimmung der Lage von AB nur darum, den Abstand OG auszumitteln. Setzt man $OG = x$, den Halbmesser $OA = a$, so hat man, wenn AB die Länge p, also AG die Länge $\frac{p}{2}$ haben soll, wegen

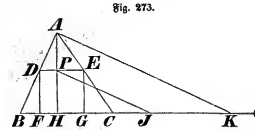
$$OG^2 = OA^2 - AG^2$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

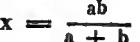
Schneidet man daher von dem Halbmesser OC ein Stück $OH = \frac{p}{2}$ ab, zieht durch den Punkt H die Sehne $AA' \perp CO$, und durch die Punkte A und A' die Sehnen AB und A'B' parallel mit der PQ, so sind OG und OG' die beiden Werthe von x, und es leisten beide Sehnen AB und A'B' der vorgelegten Aufgabe Genüge.

§. 244.

8. In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 273) soll ein Quadrat eingeschrieben werden.



Man denke sich die Aufgabe gelöst, und es sei DEFG das verlangte Quadrat. Ist $AH = a$ die Höhe des Dreieckes, so handelt es sich offenbar nur darum, den Punkt P zu bestimmen, durch welchen die mit BC parallele Gerade DE gezogen werden muß, damit $DE = DF$ werde. Man setze also $PH = DE = x$, daher $AP = a - x$, und die Seite $BC = b$. Da sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die Höhen verhalten, so hat man die Proporzion $BC : DE = AH : AP$ oder $b : x = a : a - x$, woraus



$$x = \frac{ab}{a + b}$$

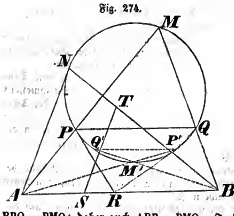
folgt; x ist demnach die vierte Proporzionale zu $a + b$, a und b. Um die Konstrukzion in der Figur selbst vorzunehmen, verlängere man BC über C hinaus, mache $HJ = b$, $JK = a$, daher $HK = a + b$, ziehe AK, und durch den Punkt J die JP ∥ AK, so ist P der gesuchte Punkt; denn man hat $HK : AH = HJ : PH$, oder $a + b : a = b : PH$, daher

$$PH = \frac{ab}{a + b} = x.$$

§. 245.

4) **Eine Gerade AB (Fig. 274) und ein Kreis MNPQ sind der Größe und der Lage nach gegeben; man suche in dem Umfange des Kreises einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man ihn mit den Endpunkten der Geraden AB verbindet, und die Sehne PQ zieht, diese mit der AB parallel laufe.**

Fig. 274.



Nimmt man wieder die Aufgabe als gelöst, und M als den gesuchten Punkt an, zieht an den Kreis die Tangente AN, und durch P die Tangente PR; so kommt es offenbar nur darauf an, den Punkt R zu bestimmen, durch welche die Tangente RP zu ziehen ist, um den Punkt P zu erhalten; wir setzen daher $AR = x$.

Weil PQ mit AB parallel sein soll, so ist der Winkel $ARP = RPQ$; aber $RPQ = PMQ$; daher auch $ARP = PMQ$. In den Dreiecken ARP und AMB kommt nun der Winkel A gemeinschaftlich vor, ferner ist $ARP = AMB$; daher $\triangle\, ARP \sim AMB$, und somit $AP : AB = AR : AM$, woraus $AB \,.\, AR = AP \,.\, AM = AN^2$, und daher $AR = \frac{AN^2}{AB}$ folgt, oder, wenn $AB = a$ und $AN = b$ gesetzt wird,

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

Man braucht, um x zu konstruiren, nur zu a und b die dritte stetige Proporzionale zu suchen; zu diesem Ende ziehe man BN, mache $BS = AN$, und ziehe durch S die Gerade TS ∥ AN; so ist $ST = x$, denn $AB : BS = AN : ST$ oder $a : b = b : ST$, also $ST = \frac{b^2}{a}$.

Macht man daher $AR = ST = x$, und zieht von R an den Kreis die Tangente RP, so bestimmt die durch den Punkt A und P gezogene Sekante den Punkt M.

Da aber von R aus noch eine zweite Tangente RP' an den Kreis gezogen werden kann, so gibt es außer M noch einen zweiten Punkt M', welcher der Aufgabe Genüge leistet, und welcher durch die Sekante AP' bestimmt wird.

IV. Uebungsaufgaben.

§. 246.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypothenuse und die Summe der beiden Katheten gegeben sind.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe beider Katheten und die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte Senkrechte gegeben sind.
3. Ein gleichschenkliges Dreieck aus seinen beiden Höhen zu konstruiren.
4. Ein Rechteck zu konstruiren, wenn die Fläche und die Diagonale gegeben sind.
5. Ein Rechteck zu konstruiren, dessen Diagonale doppelt so lang ist, als die Diagonale eines gegebenen Rechteckes.
6. Eine Gerade von unbestimmter Länge und zwei Punkte außerhalb derselben sind gegeben; man soll denjenigen Punkt der Geraden finden, der von den beiden Punkten gleiche Entfernung hat.
7. An dem einen Ende des Durchmessers eines Kreises ist eine Tangente gezogen; man soll von dem andern Ende des Durchmessers eine Gerade so ziehen, daß das zwischen dem Kreise und der Tangente liegende Stück derselben eine gegebene Länge hat.
8. Es sind zwei konzentrische Kreise gegeben: man soll durch einen gegebenen Punkt des äußern Kreises eine Gerade so ziehen, daß die Sehnen ein gegebenes Verhältniß haben.
9. In einem gegebenen Kreise durch einen Punkt, dessen Abstand bekannt ist, zwei auf einander senkrechte Sehnen zu ziehen, von denen die eine das mfache der andern ist.
10. Die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide sind a, b, c; auf den Kanten a und b werden vom Scheitel aus die Längen α und β abgeschnitten, und durch die Endpunkte der letztern eine Ebene gelegt; man soll den Punkt in der dritten Seitenkante bestimmen, durch welchen jene Ebene durchgehen muß, damit sie den mten Theil der Pyramide abschneide.

Zweiter Abschnitt.

Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene.

§. 247.

Die Lage der Punkte und Linien in der Ebene auf eine unzweideutige Art durch Zahlen ausdrücken, heißt dieselben analytisch bestimmen.

Da eine Linie vollkommen bestimmt ist, wenn man die Lage jedes einzelnen ihrer Punkte kennt, so handelt es sich zunächst darum, die Lage eines Punktes in der Ebene analytisch darzustellen.

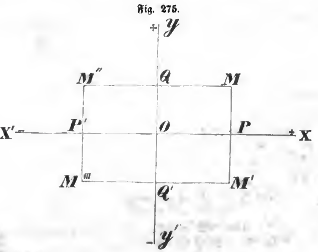
I. Analytische Bestimmung des Punktes.

a) Rechtwinklige Koordinaten.

§. 248.

Um die Lage eines Punktes M (Fig. 275) in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in derselben zwei auf einander senkrechte Gerade XX' und

Fig. 275.



YY′, welche sich in O schneiden, und fällt auf dieselben von M die Senkrechten MP und MQ; kennt man nun die Abstände OP und OQ, so ist dadurch die Lage des Punktes M vollkommen bestimmt. Denn sind die Abstände OP und OQ bekannt, so sind auch die Punkte P und Q gegeben; dadurch aber ist der Punkt M bestimmt, da man nur in P eine Senkrechte auf XX′ und in Q eine Senkrechte auf YY′ errichten darf, um durch deren Durchschnitt den Punkt M zu erhalten.

Die Länge der Geraden OP heißt die Abscisse, die Länge der Geraden OQ = MP die Ordinate des Punktes M; beide zusammen heißen Koordinaten und zwar rechtwinklige, weil sich die Geraden XX′ und YY′ unter einem rechten Winkel schneiden. Die Abscisse drückt man allgemein durch den Buchstaben x, die Ordinate durch y aus; für den Punkt M ist also $x = OP$, $y = MP$. Die Gerade XX′ wird die Abscissenaxe, die Gerade YY′ die Ordinatenaxe und ihr Durchschnittspunkt O der Ursprung oder Anfangspunkt der Koordinaten genannt.

Diesen Begriffen gemäß braucht man, um die Koordinaten eines Punktes M zu erhalten, von diesem Punkte nur eine Senkrechte auf die Abscissenaxe zu fällen; die Länge dieser Senkrechten MP stellt die Ordinate, und das Stück OP der Abscissenaxe, welches zwischen dem Anfangspunkte und der Senkrechten liegt, die Abscisse jenes Punktes vor.

Die beiden Koordinatenaxen theilen die Ebene in vier Abtheilungen oder Quadranten. Um nun anzuzeigen, in welchem Quadranten der zu bestimmende Punkt liegt, werden die Koordinaten auf den entgegengesetzten Seiten jeder Axe durch die Zeichen + und — unterschieden. Nimmt man z. B. die Abscissen rechts von der Ordinatenaxe als positiv an, so sind die Abscissen auf der linken Seite negativ; nimmt man eben so die Ordinaten oberhalb der Abscissenaxe für positiv an, so sind die unterhalb fallenden Ordinaten negativ. Man hat daher unter dieser Voraussetzung, wenn $OP = OP' = a$, und $OQ = OQ' = b$ gesetzt wird,

für den Punkt M . . . $x = a$, $y = b$;
" " " M′ . . . $x = a$, $y = -b$;
" " " M″ . . . $x = -a$, $y = b$;
" " " M‴ . . . $x = -a$, $y = -b$.

Für die Punkte, welche sich in der Abscissenaxe befinden, ist die Ordinate Null; daher

für den Punkt P . . . $x = a$, $y = 0$;
" " " P′ . . . $x = -a$, $y = 0$.

Liegt ein Punkt in der Ordinatenaxe, so ist seine Abscisse gleich Null; man hat somit

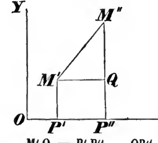
für den Punkt O . . . $x = 0$, $y = b$;
" " " O′ . . . $x = 0$, $y = -b$.

Für den Anfangspunkt O endlich, welcher sowohl in der Ordinaten- als in der Abscissenaxe liegt, ist $x = 0$ und $y = 0$.

§. 249.

Wenn man die Koordinaten zweier Punkte kennt, so läßt sich aus denselben unmittelbar auch die Entfernung der beiden Punkte bestimmen.

Fig. 276.



Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes M' (Fig. 276) durch x', y', und jene des Punktes M'' durch x'', y'', so ist $x' = OP'$, $y' = M'P'$; $x'' = OP''$, $y'' = M''P''$. Zieht man nun $M'Q \perp M''P''$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke M'QM''

$$M'M''^2 = M'Q^2 + M''Q^2;$$

aber es ist

$$M'Q = P'P'' = OP'' - OP' = x'' - x',$$
$$M''Q = M''P'' - QP'' = M''P'' - M'P' = y'' - y';$$

daher, wenn der Abstand $M'M'' = d$ gesetzt wird,

$$d^2 = (x'' - x')^2) + (y'' - y')^2$$

und

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Sind z. B. die Koordinaten des Punktes M' $x' = 2$, $y' = 3$, und jene des Punktes M'' $x'' = 5$, $y'' = 7$; so ist die Entfernung der beiden Punkte

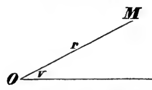
$$d = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

b) Polarkoordinaten.

§. 250.

Außer dem rechtwinkligen Koordinatensysteme ist noch ein zweites, das Polar-Koordinatensystem, vorzüglich im Gebrauche. Bei diesem nimmt man eine Gerade OZ (Fig. 277) an, welche die Polarare genannt wird, und in derselben einen festen Punkt O, welcher der Pol heißt.

Fig. 277.



Die Lage eines Punktes M ist nun vollkommen bestimmt, wenn der Abstand dieses Punktes vom Pole, nämlich MO, und der Winkel MOZ, den diese Gerade mit der Polarare bildet, bekannt sind. Die Gerade MO heißt der Leitstrahl oder Radiusvektor, und wird allgemein durch den Buchstaben r bezeichnet; den Polarwinkel MOZ wollen wir durch v ausdrücken. Die Größen r und v heißen nun die Polarkoordinaten des Punktes M.

Für die Punkte, welche in der Polarare liegen, ist $v = 0$; für den Pol selbst ist sowohl $v = 0$ als $r = 0$.

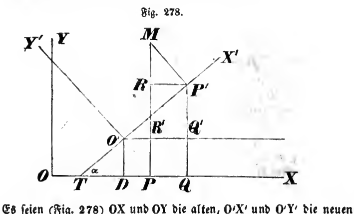
c) Transformazion der Koordinaten.

§. 251.

Oft ist es, um eine einfachere Rechnung zu erzielen, vortheilhaft, die Koordinaten eines Punktes in dem einen Systeme in die Koordinaten eines andern Systemes zu verwandeln. Damit diese Transformazion möglich sei, muß die Lage des neuen Systems gegen das alte gegeben sein.

1. Verwandlung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges.

Fig. 278.



Es seien (Fig. 278) OX und OY die alten, O′X′ und O′Y′ die neuen Axen, x, y die alten, und x′, y′ die neuen Koordinaten des Punktes M also $x = OP$, $y = MP$, $x' = O'P''$, $y' = MP'$. Die beiden Koordinatensysteme seien so gegen einander gelegen, daß die Koordinaten des neuen Anfangspunktes O′ in Bezug auf das alte System a und b sind, nämlich $OD = a$, $O'D = b$, und der Winkel, den die beiden Abscissenaxen bilden, gleich α ist. Es handelt sich nun darum, die alten Koordinaten x und y durch die neuen x′ und y′ und durch die Größen a, b, α auszudrücken.

Zieht man von P′ auf OX und MP die Senkrechten P′Q und P′R, und von O′ auf P′Q die Senkrechte O′Q′, so hat man

$$x = OP = OD + DQ - PQ = a + O'Q' - RP',$$
$$y = MP = PR' + RR' + MR = b + P'Q' + MR.$$

Nun ist

$$O'Q' = O'P' \cos\alpha = x' \cos\alpha,$$
$$RP' = MP' \sin\alpha = y' \sin\alpha,$$
$$P'Q' = O'P' \sin\alpha = x' \sin\alpha,$$
$$MR = MP' \cos\alpha = y' \cos\alpha.$$

Man erhält daher nach verrichteter Substituzion die Gleichungen:

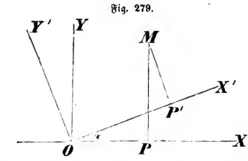
$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}\right\} 1)$$

wodurch unsere Aufgabe gelöst ist.

Haben beide rechtwinkligen Systeme denselben Anfangspunkt O (Fig. 279). so ist $a = b = o$; daher hat man unter dieser Voraussetzung die einfacheren Transformazionsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{array}\right\} 2)$$

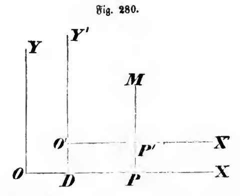
Fig. 279.



Bleiben die neuen Axen den alten parallel und wird nur der Anfangspunkt geändert, wie in Fig. 280, so ist $\alpha = o$, daher $\sin\alpha = o$, $\cos\alpha = 1$, und man hat zur Transformazion die noch einfacheren Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{array}\right\} 3)$$

Fig. 280.

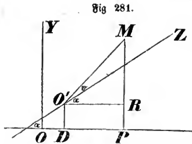


Die Gleichungen 2) und 3) lassen sich aus den darunter stehenden Figuren auch für sich besonders ableiten.

§. 252.

2) Verwandlung eines rechtwinkligen Systems in das Polarsystem und umgekehrt.

Fig 281.



Es seien (Fig. 281) OX und OY die Axen des rechtwinkligen Koordinatensystems, für welches der Punkt M die Koordinaten x und y hat, also $x = OP$, $y = MP$; ferner sei O' der Pol und O'Z die Axe des Polarsystems, in welchem der Radiusvektor $r = O'M$ des Punktes M mit der Axe den Winkel $v = MO'Z$ bildet; endlich seien die Koordinaten des Poles O' in Bezug auf das rechtwinkliche System $OD = a$, $O'D = b$, und der Winkel zwischen der Polaraxe und der Abscissenaxe gleich α.

Zieht man von O' auf MP die Senkrechte O'R, so hat man

$$x = OP = OD + DP = a + O'R,$$
$$y = MP = RP + MR = b + MR.$$

Nun ist

$$O'R = O'M \cos MO'R = r \cos(\alpha + v),$$
$$MR = O'M \sin MO'R = r \sin(\alpha + v);$$

daher

$$\left.\begin{aligned} x &= a + r\cos(\alpha + v), \\ y &= b + r\sin(\alpha + v). \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Nimmt man an, daß der Pol O (Fig. 282) im Anfangspunkte des rechtwinkligen Systems liegt, so ist $a = b = 0$, und man hat

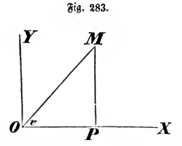
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\alpha + v), \\ y &= r\sin(\alpha + v). \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Kommt dazu noch die Annahme, daß die Polaraxe mit der Abscissenaxe OX (Fig. 283) zusammenfällt, so hat man auch $\alpha = 0$, und somit

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos v, \\ y &= r\sin v. \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Fig. 282.

Fig. 283.



Die Gleichungen 5) und 6) lassen sich aus den darunter stehenden Figuren auch für sich besonders sehr leicht ableiten.

§. 253.

Um umgekehrt von den Polarkoordinaten auf die rechtwinkligen überzugehen, muß man aus den obigen Gleichungen r und v durch x und y

ausdrücken. Betrachten wir bloß die Gleichungen 6) als die einfachsten, so folgt daraus

$$x^2 = r^2 \cos^2 v$$
$$y^2 = r^2 \sin^2 v$$

daher $$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) = r^2$$

und $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots 7)$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \sin v &= \frac{MP}{OM} = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos v &= \frac{OP}{OM} = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}\right\} 8)$$

II. Analytische Darstellung der geraden Linie.

§. 254.

Wenn man das Gesetz kennt, welchem die Lage aller Punkte einer Linie, aber auch nur die Lage dieser Punkte unterliegt, so ist dadurch die Linie vollkommen bestimmt. Da nun die Lage eines Punktes in der Ebene durch dessen Koordinaten ausgedrückt wird, so ist eine Linie als vollkommen karakterisirt zu betrachten, wenn die Relazion bekannt ist, welche zwischen den Koordinaten aller Punkte dieser Linie, aber auch nur der Punkte dieser Linie Statt findet. Diese Relazion heißt dann die **Gleichung der Linie**, und diese Linie der **geometrische Ort der Gleichung**.

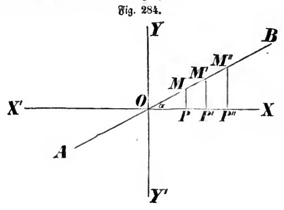
Durch die Gleichung einer Linie werden alle Punkte derselben vollkommen bestimmt; sie ist der analytische Repräsentant der Linie, dergestalt, daß jeder Linie nur eine Gleichung von bestimmter Form, und jeder Gleichung eben so nur eine bestimmte Linie entsprechen kann.

a) Eine einzige Gerade.

§. 255.

1. **Gleichung einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.**

Fig. 284.



Es sei AB (Fig. 284) eine beliebige Gerade, welche durch den Anfangspunkt O geht, und mit der Abscissenaxe OX den spitzigen Winkel $BOX = \alpha$ bildet.

Nimmt man in dieser Geraden willkürlich die Punkte M, M′, M″, . . . an, zu denen folgeweise die Ordinaten MP, M′P, M″P′, . . . und die Abscissen OP, OP′, OP″, . . . gehören, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken MPO, M′P′O, M″P″O, . . .

$MP = OP \tan\alpha$, $M'P' = OP' \tan\alpha$, $M''P'' = OP'' \tan\alpha$, . . .

Es ist daher die Ordinate eines jeden Punktes gleich der zugehörigen Abscisse, multiplizirt mit $\tan\alpha$. Heißen daher x und y die Koordinaten irgend eines Punktes der Geraden AB, so ist

$$y = x \cdot \tan\alpha,$$

oder, wenn $\tan\alpha = a$ gesetzt wird,

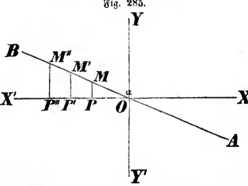
$$y = ax$$

die Gleichung der Geraden AB. Diese Gerade wird durch die Gleichung $y = ax$ so bestimmt ausgedrückt, daß, wenn man darin für x beliebige Werthe OP, OP′, OP″, . . . setzt, daraus die entsprechenden Werthe von y berechnet, und diese auf den in P, P′, P″, . . . errichteten Senkrechten folgeweise bis M, M′, M″, . . . aufträgt, alle diese Punkte in der Geraden AB liegen. Die unendlich vielen zusammengehörigen Koordinatenwerthe, welche diese Gleichung befriedigen, entsprechen eben so vielen verschiedenen Punkten der Geraden AB; die Gleichung $y = ax$ ist demnach der vollkommene analytische Repräsentant der Geraden AB.

Aus der Gleichung $y = ax$ folgt, daß man zur vollkommenen Bestimmung einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden nur die Größe a, somit den Winkel zu kennen braucht, welchen die Gerade mit der Abscissenaxe bildet. Dieser Winkel wird immer von der positiven Abscissenrichtung angefangen gegen die positive Ordinatenrichtung hin gerechnet.

Betrachten wir nun auch eine Gerade AB (Fig. 285), welche mit der Abscissenaxe einen stumpfen Winkel $BOX = \alpha$ bildet.

Fig. 285.



Sind M, M′, M″, . . . beliebige Punkte in dieser Geraden, MP, MP′, MP″, . . . ihre Ordinaten, und OP, OP′, OP″, . . . ihre Abscissen, so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken MPO, M′P′O, M″P″O, . . .

$$MP = OP \cdot \tan(180 - \alpha),\ M'P' = OP' \cdot \tan(180 - \alpha),$$
$$M''P'' = OP'' \cdot \tan(180 - \alpha), \ldots$$

Es ist also jede Ordinate gleich der entsprechenden Abscisse multiplizirt mit $\tan(180 - \alpha)$, wo jedoch nicht zu übersehen ist, daß die Ordinaten und die Abscissen entgegengesetzte Zeichen haben. Drückt man die allgemeine Ordinate durch y, die Abscisse durch $-x$ aus, und bedenkt, daß $\tan(180 - \alpha) = -\tan\alpha$ ist, so hat man

$$y = -x \cdot -\tan\alpha, \text{ oder } y = x \tan\alpha$$

als die allgemeine Relazion zwischen den Koordinaten der Geraden AB, folglich als ihre Gleichung.

Man sieht, daß die Gleichung $y = x \tan\alpha$ jede Gerade karakterisirt, welche durch den Anfangspunkt geht und mit der Abscissenaxe den Winkel α bildet, mag dieser Winkel ein spitziger oder ein stumpfer sein.

Bezeichnet man im letztern Falle, wo der Winkel α stumpf ist, und daher eine negative Tangente hat, diese durch $-a$, so erhält die Gleichung der Geraden die Form

$$y = -ax.$$

Die allgemeine Gleichung jeder Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, ist demnach $y = ax$, wo a die trigonometrische Tangente des Winkels α bedeutet, den die Gerade mit der Abscissenaxe bedeutet, und positiv oder negativ ist, je nachdem α spitzig oder stumpf ist.

Beispiele.

2) Es sei eine Gerade, welche dnrch den Anfangspunkt geht, und mit der Abscissenaxe den Wink.l 65° bildet, so ist die Gleichung derselben

$$y = x \cdot \tan 65^\circ \quad \text{oder} \quad y = 2\cdot144507\,x.$$

2) Die Gleichnng einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, welche mit der Abscissenaxe den Winkel 45° bildet, ist

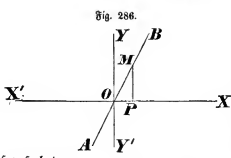
$$y = x \tan 45^\circ \quad \text{oder} \quad y = x.$$

3) Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, und mit der Abscissenaxe den Winkel 132° 25′ bildet, ist

$$y = x \tan 132^\circ 25' \quad \text{oder} \quad y = -1\cdot0945\,x.$$

Wenn umgekehrt eine Gleichung von der Form $y = ax$ gegeben ist, so ist es sehr leicht, die dazu gehörige Gerade zu konstruiren. Bedenkt man, daß die Lage einer Geraden vollkommen bestimmt ist, wenn zwei Punkte gegeben sind, durch welche die Gerade durchgehet, und daß hier einer der zwei Punkte, nämlich der Anfangspunkt der Koordinaten bereits bekannt ist; so handelt es sich nur darum, noch einen zweiten in der Geraden liegenden Punkt zu bestimmen. Am besten wird sich dazu der Punkt eignen, dessen Abscisse $x = 1$, und die Ordinate sonach $y = a$ ist. Man darf also nur die Abscisse $x = 1$ nehmen, durch den Endpunkt eine Senkrechte ziehen, darauf die Ordinate $y = a$ auftragen, und den auf diese Art bestimmten Punkt mit dem Anfangspunkte durch eine Gerade verbinden; so stellt diese die durch die Gleichung $x = ax$ ausgedrückte Gerade vor.

Fig. 286.



Um z. B. die Gleichung $y = 2x$ zu konstruiren, hat man für $x = 1$, $y = 2$; man schneidet also (F. 286) $OP = 1$ ab, macht die Senkrechte $PM = 2$, und zieht durch O und M die Gerade AB, welche somit der Gleichung $y = 2x$ entspricht. Will man ihre Neigung gegen die Abscissenaxe wissen, so hat man

$$\tang \alpha = 2, \quad \text{daher} \quad \alpha = 63^\circ\, 26'\, 6''.$$

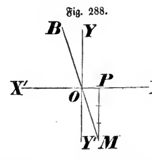
Eben so geben die Gleichungen

$$y = \tfrac{3}{4}x, \qquad\qquad y = -3x$$

folgende gerade Linien (Fig. 287, 288).

Fig. 287.

Fig. 288.

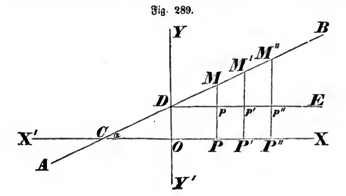


§. 256.

2. **Gleichung einer Geraden, welche nicht durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.**

Es sei AB (Fig. 289) eine gerade Linie, welche mit der Abscissenaxe

Fig. 289.



den Winkel α bildet, und die Ordinatenaxe im Punkte D schneidet, so daß $DO = b$ ist.

Sind M, M′, M″, . . . beliebige Punkte in der Geraden AB; MP, MP′, MP″, . . . ihre Ordinaten, OP, OP′, OP″, . . . ihre Abscissen, und zieht man durch D die mit OX paralle Gerade DE, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken MpD, M′p′D, M″p″D, . . .

$Mp = Dp \,.\, \tan\alpha, \quad M'p' = Dp' \,.\, \tan\alpha, \quad M''p'' = Dp'' \,.\, \tan\alpha, \ldots$

oder

$MP - b = OP \,.\, \tan\alpha, \quad MP' - b = OP' \,.\, \tan\alpha, \quad M''P'' - b = OP'' \,.\, \tan\alpha, \ldots$

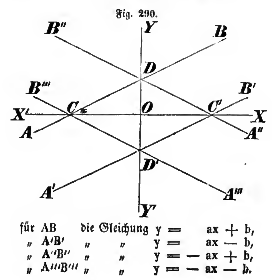
Es ist also die um b verminderte Ordinate eines jeden Punktes der Geraden gleich der zugehörigen Abscisse multiplizirt mit $\tan\alpha$. Bezeichnet man daher die Koordinaten irgend eines Punktes der Geraden AB durch x und y, und setzt $\tan\alpha = a$, so ist

$$y - b = ax \quad \text{oder} \quad y = ax + b$$

die Gleichung der Geraden AB.

Auf gleiche Weise kann man auch die Gleichungen für solche Gerade ableiten, welche mit der Abscissenaxe einen stumpfen Winkel bilden, oder welche die Ordinatenaxe unterhalb des Anfangspunktes durchschneiden. Die Gleichungen werden mit der frühern dieselbe Form haben und sich von ihr nur nur durch die Vorzeichen von a und b unterscheiden. Es wird nämlich a positiv, wenn der Winkel α spitzig, und negativ, wenn α ein stumpfer Winkel ist. Eben so ist b positiv oder negativ, je nachdem die Ordinatenaxe von der Geraden oberhalb oder unterhalb der Abscissenaxe geschnitten wird. Man hat demnach, wenn (Fig. 290) $D'O = DO$ ist, wenn ferner die Geraden AB und A′B′ mit der Abscissenaxe den spitzigen Winkel α, A″B″ und A‴B‴ dagegen den stumpfen Winkel $180 - \alpha$ bilden.

Fig. 290.



für AB	die Gleichung	$y =$	$ax + b$,
„ A′B′	„ „	$y =$	$ax - b$,
„ A″B″	„ „	$y =$	$-ax + b$,
„ A‴B‴	„ „	$y =$	$-ax - b$.

Eine für die Konstrukzion sehr geeignete Form erhält die Gleichung $y = ax + b$, wenn man darin $\frac{b}{a} = c$ setzt, wo dann $c = \frac{DO}{\operatorname{tang} \alpha} = CO$ ist; die Gleichung verwandelt sich dadurch wegen $a = \frac{b}{c}$ in die folgende $y = \frac{bx}{c} + b$, oder, wenn man durch b dividirt, und das mit x verbundene Glied auf die erste Seite überträgt,

$$\frac{x}{-c} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die Nenner von x und y bedeuten offenbar die Stücke, welche die Gerade AB an der Abscissen- und an der Ordinatenaxe vom Ursprunge angefangen abschneidet.

B e i s p i e l e.

1) Eine Gerade schneide von der Ordinatenaxe das Stück $b = 2$ ab, und bilde mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45°; so ist die Gleichung dieser Geraden

$$y = x \operatorname{tang} 45^\circ + 2, \quad \text{oder} \quad y = x + 2.$$

2) Wenn eine Gerade die Ordinatenaxe unterhalb des Ursprunges im Abstande -3 schneidet und mit der Abscissenaxe den Winkel $128^\circ 28' 28''$ bildet; so ist ihre Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} 128^\circ 28' 28'' - 3, \quad \text{oder} \quad y = -1{\cdot}25832x - 3.$$

3) Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissen- und die Ordinatenaxe in den Abständen 4 und 2 durchschneidet, ist

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = -\frac{x}{2} + 2.$$

4) Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissen- und die Ordinatenaxe in den Entfernungen -3 und $+6$ schneidet, ist

$$-\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1, \quad \text{oder} \quad y = 2x + 6.$$

Wenn man umgekehrt zu einer gegebenen Gleichung $y = ax + b$ die zugehörige Gerade konstruiren will, so ist es am besten, die Gleichung zuerst auf die Form $\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$ oder, wenn $\frac{b}{a} = c$ gesetzt wird, auf die Form $\frac{x}{-c} + \frac{y}{b} = 1$ zu bringen. Schneidet man dann von der Axe der x ein Stück $= -c$, von der Axe der y ein Stück $= b$ ab, und verbindet die beiden Endpunkte durch eine Gerade, so ist diese die gesuchte Gerade.

Um z. B. die Gleichung $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ zu konstruiren, macht man (Fig. 291) $OC = 3$, $OD = -2$, und zieht durch C und D die Gerade AB.

Fig. 291.

Eben so stellen die beiden Gleichungen

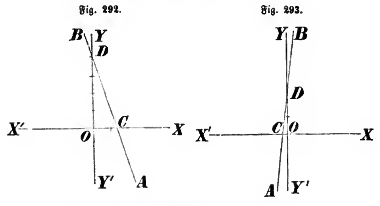
$$y = -3x + 4 \quad \text{und} \quad y = 8x + 2$$

oder, was gleichviel ist, die Gleichungen

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{2} = 1$$

die folgenden Geraden (Fig. 292, 293) vor:

Fig. 292. Fig. 293.



§. 257.

8. Allgemeine Betrachtungen über die Gleichung der Geraden.

Der Ausdruck $y = ax + b$ ist die allgemeine Gleichung einer geraden Linie, da man daraus durch Spezialisirung der Werthe von a und b alle möglichen Geraden konstruiren kann.

Läßt man a und b von Null verschieden, aber bald positiv, bald negativ sein, so stellt $y = ax + b$ jede beliebige *Gerade* vor, *welche nicht durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehet.*

Nimmt man $b=0$ an, so übergehet jene allgemeine Gleichung in die folgende $y=ax$, welche jede durch den Anfangspunkt gehende Gerade vorstellen kann.

Soll die Gerade, welche durch den Anfangspunkt geht und deren Gleichung $y=ax$ ist, mit der Abscissenaxe zusammenfallen, so muß man den Winkel α und somit auch a gleich Null setzen, wodurch jene Gleichung in $y=0$ übergeht; man erhält also $y=0$ als die Gleichung für die Abscissenaxe, was sich auch sonst von selbst ergibt, wenn man bedenkt, daß für alle Punkte der Abscissenaxe $y=0$ ist, daß also $y=0$ die Relazion ist, welche allen, aber auch nur den Punkten der Abscissenaxe zukommt.

Soll jene Gerade mit der Ordinatenaxe zusammenfallen, so muß $\alpha=90^0$, daher $\tan\alpha=a=\infty$ gesetzt werden; aus $y=ax$ ergibt sich dann $x=\frac{y}{a}=\frac{y}{\infty}$ oder $x=0$ als Gleichung der Ordinatenaxe, was ebenfalls ganz klar ist, da für alle Punkte der Ordinatenaxe $x=0$ sein muß.

Soll die Gerade mit der Axe der x, und zwar in dem Abstande b parallel laufen, so muß man in der allgemeinen Gleichung $y=ax+b$ den Winkel α, also auch a gleich Null setzen, wodurch man $y=b$ als Gleichung einer mit der Abscissenaxe parallelen, oder was einerlei ist, einer auf die Ordinatenaxe senkrechten Geraden erhält.

Geht die Gerade mit der Ordinatenaxe, und zwar in dem Abstande c parallel, so ist in der Gleichung $y=ax+b$, wie oben gezeigt wurde, $c=\frac{b}{a}$, somit $b=ac$, ferner der Winkel $\alpha=90^0$, somit $\tan\alpha=a=\infty$; die Gleichung $y=ax+b=ax+ac$ oder $x=\frac{y}{a}+c$ geht, also in die folgende $x=\frac{y}{\infty}+c$ oder $x=c$ über, welches somit die Gleichung einer mit der Ordinatenaxe parallelen, oder auf der Abscissenaxe senkrechten Geraden ist.

Man sieht, daß die Gleichung $y=ax+b$ wirklich der allgemeine Repräsentant aller möglichen Geraden ist. Für eine bestimmte Gerade haben auch a und b ganz bestimmte Werthe, während x und y für jeden andern Punkt dieser Geraden andere Werthe annehmen. Die Größen x und y sind demnach variabel, die Größen a und b dagegen beständig oder konstant.

Da die allgemeine Gleichung einer geraden Linie zwei Konstanten a und b hat, so folgt, daß zur vollkommenen Bestimmung der Lage einer Geraden zwei Bedingungen, an welche dieselbe gebunden ist, erforderlich sind. Wenn die Gleichung $y=ax$ nur eine einzige Konstante enthält, so muß man bedenken, daß bei der Geraden, welche zu jener Gleichung gehört, eine Bedingung schon dadurch angegeben ist, daß diese Gerade durch den Anfangspunkt gehen muß. Aus gleichen Gründen enthalten die Gleichungen $x=b$ und $y=c$ nur eine, und die Gleichungen $x=0$ und $y=0$ gar keine Konstante.

§. 258.

4. Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien die Koordinaten zweier Punkte M' und M'' (Fig. 294) gegeben, und zwar sei

für $M' \ldots OP' = x',\ M'P' = y'$;
„ $M'' \ldots OP'' = x'',\ M''P'' = y''$.

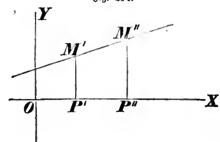


Fig. 294.

Es soll nun die Gleichung einer Geraden entwickelt werden, welche durch die beiden Punkte M' und M'' geht, die man der Kürze halber auch die Punkte $x'y'$ und $x''y''$ zu nennen pflegt.

Die verlangte Gleichung wird jedenfalls die Form

$$y = ax + b \ldots 1)$$

haben, und es kommt nur darauf an, die noch unbekannten Größen a und b den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen.

Damit die Gerade durch den Punkt $x'y'$ gehe, muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin x' und y' anstatt x und y setzt; es muß demnach die Bedingungsgleichung

$$y' = ax' + b \ldots 2)$$

erfüllt werden. Soll die Gerade auch durch den Punkt $x''y''$ gehen, so muß ihrer Gleichung auch Genüge geleistet werden, wenn man x'' und y'' statt x und y setzt, oder es muß die Bedingungsgleichung

$$y'' = ax'' + b \ldots 3)$$

Statt finden.

Aus diesen beiden Bedingungsgleichungen lassen sich nun durch Elimination die noch unbekannten Größen a und b bestimmen; man erhält

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \qquad b = y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x'$$

Setzt man nun diese für a und b gefundenen Werthe in die Gleichung 1) so findet man

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x + y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x' \ldots 4)$$

als die gesuchte Gleichung einer durch die Punkte $x'y'$ und $x''y''$ gehenden Geraden.

Diese Gleichung wird kürzer gewöhnlich auf folgende Art abgeleitet.

Subtrahirt man die Gleichung 2) von 1), und dann von 3), so erhält man

$$y - y' = a\,(x - x') \ldots 5),$$
$$y'' - y' = a\,(x'' - x') \ldots 6).$$

Aus der Gleichung 6) folgt nun

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

welcher Werth in 5) substituirt,

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots 7)$$

als die verlangte Gleichung gibt.

Diese letztere Form, welche sich sehr leicht auf jene 4) zurückführen läßt, ist in der Anwendung bequemer, und läßt sich auch leichter dem Gedächtnisse einprägen.

Beispiele.

1) Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $x' = 2$, $y' = 3$ und durch den Punkt $x'' = 3$ und $y'' = 4$ geht.

Es ist $y'' - y' = 1$, $x'' - x' = 1$, daher
$y - 3 = x - 2$ oder $y = x + 1$
die gesuchte Gleichung.

2) Die Gerade, welche durch die Punkte $x' = -2$, $y' = 1$ und $x'' = 0$, $y'' = 5$ geht, hat die Gleichung

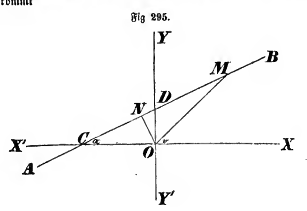
$$y - 1 = \tfrac{4}{2}(x + 2) \quad \text{oder} \quad y = 2x + 5.$$

§. 259.

5. Polargleichung für die Gerade.

Um die Gleichung der Geraden AB (Fig. 295) für die Polarkoordinaten zu erhalten, nehmen wir der Einfachheit halber den Pol im Anfangspunkte der rechtwinkligen Koordinaten, und die Abscissenaxe OX als die Polaraxe an; für den Punkt M ist dann $r = OM$, $v = MOX$, und man darf nur in der für rechtwinklige Koordinaten entwickelten Gleichung $y = ax + b$ die Substituzionen $y = r \sin v$ und $x = r \cos v$ vollführen. Man bekommt

Fig 295.



$$r \sin v = ar \cos v + b,$$
$$r (\sin v - a \cos v) = b,$$
$$r (\sin v - \tang \alpha \cos v) = b,$$
$$r \cdot \frac{\sin v \cos \alpha - \cos v \sin \alpha}{\cos \alpha} = b,$$
$$r \cdot \sin (v - \alpha) = b \cos \alpha \quad \text{und} \quad r = \frac{b \cos \alpha}{\sin (v - \alpha)}.$$

Setzt man $CO = c$, so ist $b = c \tang \alpha$ oder $b \cos \alpha = c \sin \alpha$; daher

$$r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (v - \alpha)}$$

die Polargleichung der Geraden AB.

Diese Gleichung kann man kürzer finden, wenn man von O auf AB die Senkrechte ON fällt; es ist dann

$$ON = OC \sin \alpha = c \sin \alpha \text{ und } OM = \frac{ON}{\sin NMO} \text{ oder } r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (v - \alpha)}.$$

Geht die Gerade durch den Pol, so ist $v = \alpha$ die Relazion, welche allen Punkten der Geraden zukommt, also die Polargleichung der Geraden. Die allgemeine Polargleichung $r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (v - \alpha)}$ geht wegen $c = 0$ und $\sin (v - \alpha) = \sin 0 = 0$ in $r = \frac{0}{0}$ über, welcher unbestimmte Ausdruck andeutet, daß r alle möglichen Werthe annehmen könne.

b) Zwei Gerade.

§. 260.

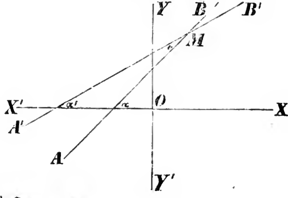
1. Durchschnittspunkt zweier Geraden.

Es seien

$$y = ax + b \quad \ldots \; 1)$$
$$y = a'x + b' \quad \ldots \; 2)$$

die Gleichungen der beiden Geraden AB und A′B′ (Fig. 296); man suche die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes.

Fig. 296.



Für alle Punkte der Geraden AB ist $y = ax + b$, für alle Punkte der Geraden A'B' ist $y = a'x + b'$; für den Punkt, der in den beiden Geraden liegt, nämlich für den Durchschnittspunkt M, muß daher $y = ax + b$ und zugleich auch $y = a'x + b'$ sein. Dem Punkte M werden also jene Koordinaten x und y zukommen, durch welche beiden Gleichungen zugleich Genüge geleistet wird; diese Werthe erhält man offenbar durch Auflösung jener zwei Gleichungen, man bekommt nämlich

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Kennt man daher die Gleichungen zweier Geraden, so kann man aus diesen, auch ohne alle Konstrukzion der Linien, die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

Seien z. B.

$$y = 2x - 3,$$
$$y = 3x + 4$$

die gegebenen Gleichungen, so ist

$$\begin{array}{lll} a' = 3 & b = -3 & a'b = -9 \\ a = 2 & b' = 4 & ab' = 8 \\ \hline a' - a = 1 & b - b' = -7 & a'b - ab' = -17 \end{array}$$

daher sind die Koordinaten des Durchschnittspunktes der zwei Geraden

$$x = -7; \quad y = -17.$$

Wäre in den zwei gegebenen Gleichungen $a' = a$, so würden die Werthe für x und y unendlich groß werden, d. h. der Durchschnittspunkt der Geraden würde in unendliche Entfernung hinausfallen, oder, die beiden Geraden würden sich gar nicht schneiden. Dieses ist ganz natürlich; denn wenn $a' = a$ ist, so bilden die beiden Geraden mit der Abscissenaxe gleiche Winkel, sind somit parallel, und können sich nicht schneiden.

§. 261.

2. Winkel zweier Geraden.

Es seien die Gleichungen der Geraden AB und A'B', welche mit der Abscissenaxe die Winkel α und α' bilden,

$$y = ax + b \ldots 1),$$
$$y = a'x + b' \ldots 2),$$

wo also $a = \tang \alpha$, $a' = \tang \alpha'$ ist; man soll den Winkel bestimmen, den diese beiden Geraden einschließen. Bezeichnet man diesen Winkel AMA' durch v, so hat man

$$\tang v = \tang(\alpha - \alpha') = \frac{\tang \alpha - \tang \alpha'}{1 + \tang \alpha \tang \alpha'} \text{ oder } \tang v = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

durch welche Formel unsere Aufgabe gelöst ist, da durch die Tangente des Winkels dieser selbst bestimmt ist.

Man suche z. B. den Winkel, welchen die den Gleichungen

$$y = 2x - 3,$$
$$y = -3x + 2$$

entsprechenden Geraden bilden. Es ist

$$a = 2, \quad a' = -3,$$

daher

$$\text{tang}\, v = \frac{5}{-5} = -1,$$

somit

$$v = 135^0.$$

Die Gleichung $\text{tang}\, v = \frac{a - a'}{1 + aa'}$ gibt ein sehr einfaches Kennzeichen an die Hand, nach welchem man unmittelbar aus den Gleichungen zweier Geraden beurtheilen kann, ob diese mit einander parallel oder auf einander senkrecht sind. Sollen die beiden Geraden AB und A'B' mit einander parallel sein, so muß der Winkel $v = o$, daher auch $\text{tang}\, v = o$, folglich

$$a' = a$$

sein.

Sollen dagegen die Geraden AB und A'B' auf einander senkrecht stehen, so muß der Winkel $v = 90^0$, daher $\text{tang}\, v = \infty$, und somit $1 + aa' = o$, oder

$$a' = -\frac{1}{a} \text{ sein.}$$

§. 262.

3. Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und mit einer andern gegebenen Geraden parallel ist.

Es seien x', y' die Koordinaten des gegebenen Punktes, und

$$y = ax + b \ldots 1)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden; die Gleichung der gesuchten mit ihr parallelen Linie wird der Form nach sein

$$y = a'x + b' \ldots 2)$$

wo a' und b' den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind.

Damit die gesuchte Gerade durch den Punkt $x'y'$ gehe, muß ihrer Gleichung 2) Genüge geschehen, wenn man darin x' und y' anstatt x und y setzt, so daß man

$$y' = a'x' + b' \ldots 3)$$

erhält. Aus den Gleichungen 2) und 3) läßt sich bereits eine der beiden Unbekannten a' und b' eliminiren; denn durch die Subtrakzion derselben fällt b' weg, und man erhält

$$y - y' = a' (x - x') \ldots 4)$$

Dieß ist die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $x' y'$ geht; aber a' ist noch unbestimmt, weil man durch einen Punkt unendlich viel Gerade ziehen kann.

Damit nun die Gerade mit der gegebenen parallel sei, muß die Bedingungsgleichung $a' = a$ Statt finden; daher ist die gesuchte Gleichung

$$y - y' = a (x - x') \ldots 5)$$

Z. B. Für eine Gerade, welche durch den Punkt $x' = 2$, $y' = -2$ geht,

und mit der Geraden, deren Gleichung $y = 6x - 4$ ist, parallel läuft, hat man die Gleichung

$$y + 2 = 6(x - 2) \text{ oder } y = 6x - 14.$$

§. 263.

4. Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und auf einer gegebenen Geraden senkrecht ist.

Es seien x', y' die Koordinaten des gegebenen Punktes,

$$y = ax + b \;\ldots\; 1)$$

die Gleichung der gegebenen, und

$$y = a'x + b' \;\ldots\; 2)$$

die Gleichung der gesuchten auf ihr senkrechten Geraden.

Da die gesuchte Gerade durch den Punkt $x'y'$ gehen soll, so wird ihre Gleichung

$$y - y' = a'(x - x') \;\ldots\; 3)$$

sein, wo a' noch unbestimmt ist.

Da ferner diese Gerade auf der gegebenen senkrecht sein soll, so muß die Bedingungsgleichung $a' = -\frac{1}{a}$ Statt finden.

Die gesuchte Gleichung ist somit

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \;\ldots\; 4).$$

Z. B. Zu einer Geraden, welche durch den Punkt $x' = 1$, $y' = 2$ geht, und auf der Geraden, deren Gleichung $y = -\frac{x}{2} + 1$ ist, senkrecht steht, gehört die Gleichung

$$y - 2 = 2(x - 1) \text{ oder } y = 2x.$$

§. 264.

5. Länge der Senkrechten von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade.

Sind x', y' die Koordinaten des gegebenen Punktes, und

$$y = ax + b \;\ldots\; 1)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden, so ist

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \;\ldots\; 2)$$

die Gleichung einer auf dieser Geraden senkrechten, und durch den Punkt x' y' gehenden gerade Linie.

Um die Länge dieser Senkrechten zu finden, muß der Abstand zwischen dem Punkte x' y' und dem Punkte, in welchem die Senkrechte die gegebene Gerade durchschneidet, gesucht werden. Zur Bestimmung dieses Durchschnittspunktes darf man nur die Gleichungen 1) und 2) als zusammengehörig betrachten, und daraus x und y bestimmen; man erhält

$$x = \frac{x' + ay' - ab}{1 + a^2}, \quad y = \frac{a(x' + ay) + b}{1 + a^2},$$

welche Koordinaten wir der Unterscheidung halber durch x'', y'' bezeichnen wollen. Kennt man aber die Koordinaten x', y' und x'', y'' zweier Punkte, so hat man für die Berechnung ihres Abstandes, den wir hier d nennen wollen, den Ausdruck

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Nun ist

$$x'' - x' = \frac{a\,(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

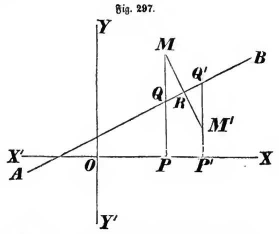
$$y'' - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2};$$

daher

$$d = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Das doppelte Zeichen, welches hier wegen der Wurzelgröße stehen kann, deutet auf die zweifache Lage der Senkrechten, je nachdem der gegebene Punkt auf der einen oder der andern Seite der gegebenen Geraden sich befindet.

Fig. 297.



Ist der Punkt M (Fig. 297) oberhalb der Geraden AB, so ist $y' = MP$, ferner wegen der Gleichung $y = ax + b$ für den Punkt Q, $PQ = a \,.\, OP + b$, also weil $OP = x'$ ist, $ax' + b = PQ$; man hat demnach

$$y' - ax' - b = MP - PQ = MQ;$$

der Zähler in dem Werthe von d, welcher letztere nothwendig positiv sein muß, fällt also positiv aus; daher muß man auch die im Nenner erscheinende Wurzelgröße positiv annehmen. Liegt hingegen der gegebene Punkt M' unterhalb der Geraden AB, so ist $y' = M'P'$, ferner für den Punkt Q', der in der Geraden AB liegt, $P'Q' = a \,.\, OP' + b$, oder weil $OP' = x'$ ist, $ax' + b = P'Q'$; man hat daher $y' - ax' - b = M'P' - P'Q' =$

— M'Q'; der Zähler in d wird also bei dieser Lage des Punktes M' negativ, und man muß, damit d positiv werde, auch bei der Wurzelgröße des Nenners das Zeichen — nehmen.

Ist M der Anfangspunkt der Koordinaten; so hat man wegen $x' = y' = 0$

$$d = \frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Z. B. die Senkrechte, die vom Punkte $x' = 3$, $y' = 1$ auf die Gerade, deren Gleichung $y = x + 3$ ist, gefällt wird, hat die Länge

$$d = \frac{1 - 3 - 3}{\sqrt{1 + 1}}, = \frac{-5}{\sqrt{2}}$$

wo $\sqrt{2}$ negativ zu nehmen ist.

Für die Senkrechte, welche vom Anfangspunkte der Koordinaten auf die Gerade, deren Gleichung $y = 3x - 1$ ist, gezogen wird, findet man die Länge

$$d = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

wo die Wurzelgröße positiv genommen werden muß.

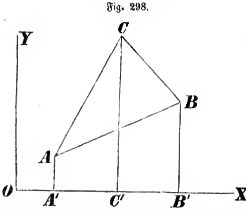
c. Drei gerade Linien.

§. 265.

Drei gerade Linien, welche sich wechselseitig schneiden, schließen ein geradliniges Dreieck ein, und dieses ist es, welches wir hier analytisch darstellen wollen.

1. Lage und Länge der Seiten, und Fläche des Dreieckes.

Fig. 298.



Beziehen wir das Dreieck ABC (Fig. 298) auf das rechtwinklige Koordinatensystem XOY, und es seien die Koordinaten

des Punktes A . . . x', y',
" " B . . . x'', y'',
" " C . . . x''', y'''.

Hinsichtlich der Lage der Seiten ist dann

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \text{ die Gleichung der Seite AB,}$$

$$y - y' = \frac{y''' - y'}{x''' - x'}(x - x') \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \text{AC,}$$

$$y - y'' = \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(x - x'') \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \text{BC.}$$

Drückt man die Längen der Seiten BC, AC, AB folgeweise durch s', s'', s''' aus, so ist

$$s' = \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2},$$

$$s'' = \sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2},$$

$$s''' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Heißt endlich f die Fläche des Dreieckes ABC, so ist offenbar

$$f = AA'C'C + CC'B'B - AA'B'B;$$

un ist

$$AA'C'C = \frac{(y' + y''')(x''' - x')}{2},$$

$$CC'B'B = \frac{(y'' + y''')(x'' - x''')}{2},$$

$$AA'B'B = \frac{(y' + y'')(x'' - x')}{2};$$

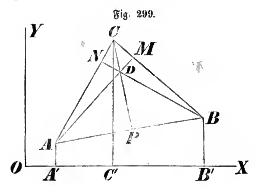
und daher

$$f = \frac{x'(y'' - y''') - x'(y' - y''') + x'''(y' - y'')}{2}.$$

§. 266.

2. Senkrechte, welche von den Scheitelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden.

Fig. 299.



Die Gerade AM (Fig. 299), welche durch den Punkt A $[x\ y']$ geht und auf BC $\left[y - y'' = \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(x - x'')\right]$ senkrecht ist, hat die Gleichung

$$y - y' = \frac{x'' - x'''}{y''' - y''}(x - x') \;.\;.\;.\; 1)$$

Eben so sind die Gleichungen der Geraden BN und CP, welche durch die Punkte B und C auf die Seiten AC und AB senkrecht gezogen werden,

$$y - y'' = \frac{x' - x'''}{y''' - y'}(x - x'') \;.\;.\;.\; 2)$$

$$y - y''' = \frac{x'' - x'}{y' - y''}(x - x''') \;.\;.\;.\; 3)$$

Sucht man nun die Koordinaten des Durchschnittspunktes D zwischen den Senkrechten AM und BN, so erhält man dafür, wenn man die Gleichungen 1) und 2) als koexistirend betrachtet, und daraus x und y durch Elimazion sucht,

$$x = \frac{(y'''-y'')(y'''-y')(y''-y') + x'(x''-x''')(y'''-y') - x''(x'-x''')(y'''-y'')}{(x'' - x''')(y''' - y') - (x' - x''')(y''' - y'')}$$

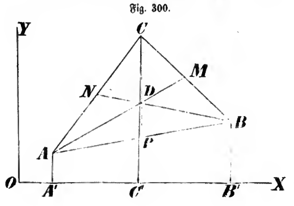
$$y = \frac{(x'''-x'')(x'''-x')(x''-x') + y'(y''-y''')(x'''-x') - y''(y'-y''')(x'''-x')}{(y' - y''')(x'' - x') - (y' - y''')(x''' - x'')}.$$

Allein dieselben Koordinaten erhält man auch für den Durchschnittspunkt zwischen den Senkrechten AM und CP, so wie zwischen BN und CP; woraus hervorgeht, daß sich die Senkrechten, welche von den Scheitelpunkten eines Dreieckes auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 267.

3. Verbindungslinien zwischen den Scheitelpunkten und den Halbirungspunkten der Seiten.

Fig. 300.



Sind M, N, P (Fig. 300) die Halbirungspunkte der Seiten BC, AC, AB, so hat man für dieselben folgende Koordinaten:

für den Punkt M . . $\frac{x'' + x'''}{2}$, $\frac{y'' + y'''}{2}$;

" " " . N . . $\frac{x' + x'''}{2}$, $\frac{y' + y'''}{2}$;

" " " P . . $\frac{x' + x''}{2}$, $\frac{y' + y''}{2}$.

Die Gleichung der AM, als einer durch die Punkte (x', y') und $\left(\frac{x'' + x'''}{2}, \frac{y'' + y''}{2}\right)$ gehenden Geraden, ist

$$y - y' = \frac{2y' - y'' - y'''}{2x' - x'' - x'''}(x - x') \quad . . . 1)$$

Eben so sind die Gleichungen der Geraden BN und CP

$$y - y'' = \frac{2x' - y' - y'''}{2x' - x' - x'''}(x - x'') \quad . . . 2)$$

$$y - y''' = \frac{2y''' - y' - y''}{2x'' - x' - x''}(x - x''') \quad . . . 3)$$

Sucht man nun die Durchschnittspunkte von je zwei dieser Geraden, so erhält man für alle drei Punkte die nämlichen Koordinaten, nämlich

$$x = \frac{x' + x'' + x'''}{3},$$

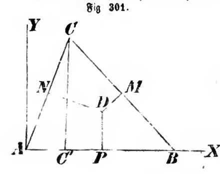
$$y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

Daraus folgt, daß sich die Geraden, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüberstehenden Scheitelpunkten verbinden, in einem und demselben Punkte schneiden. Dieser merkwürdige Punkt wird der Schwerpunkt des Dreieckes genannt.

§. 268.

4. Senkrechte, welche in den Halbirungspunkten der Seiten auf diese errichtet werden.

Fig 301.



Um in die zu entwickelnden Formeln mehr Einfachheit zu bringen, wollen wir (Fig. 301) die Seite AB = c zur Abscissenaxe, und den Scheitel A zum Anfangspunkte der Koordinaten annehmen, und die Koordinaten des Punktes C durch α und β ausdrücken.

Unter dieser Voraussetzung sind

$x' = 0,\ y' = 0$ die Koordinaten des Punktes A,
$x'' = c,\ y'' = 0$ „ „ „ „ B,
$x''' = \alpha,\ y''' = \beta$ „ „ „ „ C,

ferner $\frac{\alpha+c}{2}, \frac{\beta}{2}$ „ „ „ Halbirungspunktes M,

$\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ „ „ „ „ N,

$\frac{c}{2}, 0$ „ „ „ „ P;

sodann $y = 0$ die Gleichung der Seite AB,

$y = \frac{\beta}{\alpha}x$ „ „ „ „ AC,

$y = \frac{\beta}{\alpha - c}(x - c)$ „ „ „ „ BC,

und

$x = \frac{c}{2}$ die Gleichung der in P auf AB Senkrechten,

$y - \frac{\beta}{2} = \frac{c-\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha+c}{2}\right)$ „ „ „ „ N „ AC „

$y - \frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{c}\right)$ „ „ „ „ M „ BC „

Sucht man nun die Koordinaten für die Durchschnittspunkte zwischen je zwei dieser Senkrechten, so findet man für alle drei Punkte dieselben Größen, nämlich

$$x = \frac{c}{2},\ y = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha(\alpha - c)}{2\beta};$$

woraus folgt, daß die in den Halbirungspunkten der Dreieckseiten errichteten Senkrechten sich in einem und demselben Punkte schneiden.

d. Uebungsaufgaben.

§. 269.

1. Man konstruire die Gleichungen

a) $y = 3x$, b) $y = -4x$,

c) $y = -\frac{x}{3}$, d) $5y = 2x$,

e) $y = 3x + 7$, f) $y = x - \frac{3}{4}$,

g) $y = -2x + 3$, h) $3y = -x + 6$.

2. Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte

a) $x' = 1,\ y' = -1,\ x'' = -2,\ y'' = 2$;

b) $x' = -\frac{1}{2},\ y' = 3,\ x'' = 3,\ y'' = 0$;

c) $x' = 4,\ y' = -2,\ x'' = -4,\ y = -3$

gehet.

3. Es ist die Bedingungsgleichung anzugeben, welche zwischen den Koordinaten dreier Punkte Statt finden muß, damit diese in einer und derselben Geraden liegen.
4. Man suche die Koordinaten des Durchschnittspunktes, so wie den Winkel der beiden Geraden

$$\text{a)}\quad y = -3x + 5, \quad y = 2x - 4;$$

$$\text{b)}\quad y = \frac{2x}{3} + 3, \quad 4y = -2x + 3.$$

5. Es sind gegeben
   a) der Punkt $x' = 1$, $y' = -1$ und die Gerade $y = 5x + 1$;
   b) „ „ $x' = -3$, $y' = 0$ „ „ „ $y = -3x + 4$;
   c) „ „ $x' = 0$, $y' = 0$ „ „ „ $y = \frac{x}{3} - 3$.

   Man suche
   α) die Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht und mit der zugehörigen Geraden parallel ist;
   β) die Gleichung der Geraden, welche durch jeden dieser Punkte geht und auf die zugehörige Gerade senkrecht ist;
   γ) die Entfernung eines jeden dieser Punkte von der entsprechenden Geraden.
6. Wenn man in einem geradlinigen Dreiecke von den Scheitelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten Senkrechte fällt, die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüberstehenden Scheitelpunkten verbindet und in den Halbirungspunkten der Seiten auf diese Senkrechte errichtet, so liegen die drei Punkte, in denen sich je drei jener Linien durchschneiden, in einer geraden Linie.

III. Analytische Darstellung der Linien der zweiten Ordnung.

§. 270.

Bei der analytischen Darstellung der krummen Linien werden wir uns auf jene Kurven beschränken, deren Eigenschaften wir schon in der Planimetrie auf synthetischem Wege untersucht haben, nämlich auf die Kreislinie, die Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Da diese Linien durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen, so nennt man sie und insbesondere die letzten drei, Kegelschnittslinien. Auch werden sie Linien der zweiten Ordnung genannt, weil ihre Gleichungen, wie wir später sehen werden, sämmtlich des zweiten Grades sind.

a) Die Kreislinie.

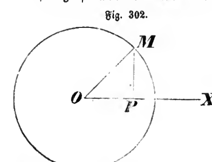
§. 271.

Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, darf man nur die Haupteigenschaft desselben, daß nämlich alle seine Punkte vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, in die analytische Zeichensprache übertragen.



1. Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Koordinaten liegt.

Fig. 302.



Es sei O (Fig. 302) der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser $OM = a$ ist, und zugleich der Anfangspunkt der Koordinaten, OX sei die Abscissenaxe, so daß für einen beliebigen Punkt M der Kreislinie $x = OP$, $y = MP$ ist. Da nun in dem rechtwinkligen Dreiecke MPO, $OP^2 + MP^2 = OM^2$ ist, so hat man $x^2 + y^2 = a^2$. Der Punkt M ist aber ein willkürlicher Punkt der Kreislinie, daher gilt die für x und y des Punktes M abgeleitete Relazion für die Koordinaten aller Punkte der Kreislinie; die Relazion $x^2 + y^2 = a^2$ ist somit die gesuchte Gleichung des Kreises.

Diese Gleichung karakterisirt den Kreis dergestalt, daß man sie nur unter verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten und die jedesmaligen Ergebnisse in die gewöhnliche Wortsprache zu übersetzen braucht, um die Gestalt und alle andern Eigenschaften dieser krummen Linie herauszulesen; sie enthält das vollkommene Bild derselben.

Die räumliche Deutung einer Gleichung pflegt man ihre Diskussion zu nennen.

§. 272.

2. Diskussion der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$.

1. Sucht man aus dieser Gleichung den Werth von y, so hat man

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus dem doppelten Zeichen der Wurzelgröße ersieht man, daß jedem Werthe von x, für welchen überhaupt y möglich ist, zwei gleiche aber entgegengesetzte Werth von y entsprechen; woraus folgt, daß sich die Kreislinie oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe gleichförmig ausdehnt.

2. Löst man die Gleichung des Kreises nach x auf, so erhält man

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Es gehören also auch zu jedem Werthe von y, für den überhaupt x möglich ist, zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von x; die Kreislinie erstreckt sich demnach auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe in zwei symmetrischen Aesten, welche so über einander gelegt werden können, daß sie sich vollkommen decken.

Der Kreis wird daher durch die beiden Koordinatenaxen in vier kongruente Theile getheilt

3. Setzt man in der Gleichung $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ die Abscisse $x = 0$, so erhält man das y für die Durchschnittspunkte des Kreises mit der Or-

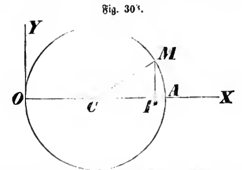
dinatenaxe, es wird $y = \pm a$; die Kreislinie schneidet also die Ordinatenaxe in zwei Punkten, welche von dem Anfanspunkte auf entgegengesetzten Seiten den Abstand a haben. Aus $x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}$ folgt für $y = o$ eben so $x = \pm a$, d. h. die Kreislinie schneidet auch die Abscissenaxe in zwei Punkten, welche ebenfalls auf entgegengesetzten Seiten vom Anfangspunkte um die Größe a entfernt sind.

4. Für $x > a$ wird y imaginär, und für $y > a$ wird x imaginär; der größte Werth, den man für x oder y setzen kann, ist also der Halbmesser a. Errichtet man daher durch die vier Durchschnittspunkte der Kreislinie mit den beiden Axen ein Quadrat, dessen Seiten mit diesen Axen parallel laufen, so schließt dieses den Kreis vollkommen ein. Der Kreis ist somit eine geschlossene krumme Linie.

§. 273.

3. Gleichung eines Kreises, dessen Periferie durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, und dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt.

Fig. 303.



Es sei C (Fig. 303) der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius $CO = a$ ist; O sei der Anfangspunkt der Koordinaten, und OX die Abscissenaxe. Ist nun M ein willkürlich angenommener Punkt der Kreislinie, so ist für denselben $x = OP$, $y = MP$, und man hat in dem rechtwinkligen Dreiecke MCP die Gleichung $MP^2 + CP^2 = CM^2$, oder $y^2 + (x - a)^2 = a^2$, woraus $y^2 + x^2 - 2ax = o$ als die zwischen den Koordinaten jedes beliebigen Punktes der Kreislinie vorherrschende Relazion, somit als die Gleichung dieser Kreislinie hervorgehet.

Aus $y^2 + x^2 - 2ax = 0$ folgt $y^2 = x\,(2a - x)$, oder auf die Figur bezogen, $MP^2 = OP . PA$, d. h. jede auf dem Durchmesser senkrechte Ordinate ist die mittlere geometrische Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten desselben.

§. 274.

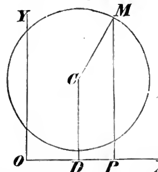
4. Allgemeine Gleichung des Kreises.

Es seien (Fig. 303) $OD = p$, $CD = q$ die Koordinaten des Mittelpunktes C in Bezug auf das rechtwinklige System XOY, M irgend ein be-

liebiger Punkt der Kreislinie, seine Koordinaten $x = OP$, $y = MP$ und $CM = a$ der Halbmesser; so hat man für den Abstand der Punkte M und C die Gleichung

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2 \ldots 1)$$

Fig. 304.



Da M ein willkürlicher Punkt der Kreislinie ist, so gilt die für x und y des Punktes M aufgestellte Relazion für die Koordinaten aller Punkte der Periferie; sie ist somit die **allgemeine Gleichung des Kreises.**

Die Gleichung 1) enthält **drei** konstante Größen, was anzeigt, daß zur vollkommenen Bestimmung der Lage und Größe eines Kreises drei Bedingungen erforderlich sind.

Man kann diese drei Konstanten p, q, a beliebig ändern, so bedeutet die Gleichung immer wieder einen Kreis, wenn auch dessen Lage und Größe eine andere wird; die Natur der krummen Linie wird durch die Aenderung der Konstanten durchaus nicht geändert.

Die zwei früher entwickelten Gleichungen des Kreises sind in der Gleichung 1) als besondere Fälle enthalten.

Nimmt man nämlich den Durchmesser zur Abscissenaxe und den Anfangspunkt der Koordinaten in der Periferie des Kreises an, so ist

$$p = a, \quad q = o,$$

und die Gleichung 1) geht über in $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, oder

$$x^2 + y^2 - 2ax = o \ldots 2)$$

Nimmt man den Mittelpunkt selbst zum Anfangspunkte der Koordinaten, so ist $p = o$, $q = o$, und man erhält aus 1) die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \ldots 3)$$

Die Gleichungen 2) und 3) enthalten nur eine einzige Konstante, was ganz natürlich ist, da von den drei im Allgemeinen nöthigen Bedingungen zwei bereits durch die Voraussetzungen, unter welchen jene Gleichungen Statt finden, ausgesprochen sind.

Beispiele.

1) Es seien $p = 1$, $q = 2$ die Koordinaten des Mittelpunktes und $a = 3$ der Halbmesser des Kreises, so ist

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$$

die Gleichung desselben.

2) Zu einem Kreise, für welchen $p = o$, $q = -1$ und $a = 3$ ist, gehört die Gleichung

$$x^2 + (y + 1)^2 = 9$$

oder $$x^2 + y^2 + 2y = 8.$$

3. Ein Kreis, für welchen $p = -2$, $q = 1$, $a = \frac{2}{3}$ ist, hat die Gleichung $$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{9}$$

oder $$9x^2 + 9y^2 + 36x - 18y + 41 = 0.$$

Wenn man umgekehrt den Kreis, zu dem eine Gleichung gehört, konstruiren will, so bringe man diese zuerst auf die Form

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2,$$

wo sodann mittelst der gefundenen Werthe p, q, a der Kreis leicht zu verzeichnen ist.

Beispiele

1) Um den Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

ist, zu konstruiren, addire man zu $x^2 + 4x$ das Quadrat des halben Koeffizienten von x, nämlich 4, und zu $y^2 - 6y$ das Quadrat des halben Koeffizienten von y, nämlich 9; setze aber die Zahlen 4 und 9, damit die Gleichheit nicht gestört werde, auch auf der zweiten Seite dazu; man erhält

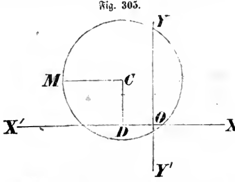
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$$

oder $$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Es ist somit $p = -2$, $q = 3$, $a = \sqrt{16} = 4$.

Um nun den Kreis zu konstruiren, suche man zuerst einen Punkt C

Fig. 305.



(Fig. 305), dessen Koordinaten -2 und 3 sind, und beschreibe aus diesem Punkte als Zentrum einen Kreis, dessen Radius $CM = 4$ ist.

2) Um die Gleichung

$$36x^2 + 36y^2 - 36x + 144y + 89 = 0$$

zu konstruiren, erhält man

$$x^2 - x + y^2 + 4y = -\tfrac{89}{36}$$

oder $$x^2 - x + \tfrac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 = -\tfrac{89}{36} + \tfrac{1}{4} + 4$$

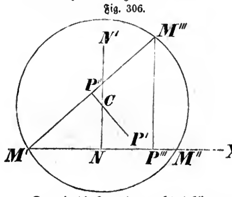
$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \tfrac{16}{9}.$$

Es ist daher die Mittelpunkts-Abscisse $p = \frac{1}{2}$,
" " Ordinate $q = -2$,
der Radius $a = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$,
aus welchen Daten sich sofort der Kreis konstruiren läßt.

§. 275.

5) Gleichung eines Kreises, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Fig. 306.



Es seien M′, M″, M‴ (F. 306) die drei Punkte, deren Koordinaten x', y', x'', y'', x''', y''' gegeben sind, und man suche die Gleichung des durch diese drei Punkte gelegten Kreises.

Die gesuchte Gleichung wird offenbar die Form

$$(x-p)^2+(y-q)^2=a^2 \ldots 1)$$

haben, wo p, q, a noch unbekannt sind.

Da wir die Lage der rechtwinkligen Koordinaten beliebig wählen können, so wollen wir, um die Auflösung unserer Aufgabe zu vereinfachen, den Punkt M′ selbst als Anfangspunkt, und die durch M′ und M″ gezogene Gerade M′X als Abscissenaxe annehmen; es sind dann

die Koordinaten des Punktes M′ . . . $x' = 0$, $y' = 0$;
" " " " M″ . . . x'', $y'' = 0$;
" " " " M‴ . . . x''', y'''.

Damit der Kreis durch den Punkt M′ gehe, müssen die Koordinaten dieses Punktes statt x, y in die Gleichung 1) substituirt derselben Genüge leisten, es muß also

$$p^2 + q^2 = a^2 \ldots 2)$$

sein, und vermöge dieser Relazion nimmt die Gleichung 1) die einfachere Form an

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0 \ldots 3)$$

Damit ferner der Kreis durch die Punkte M″, M‴ gehe, müssen auch die Bedingungsgleichungen

$$x''^2 - 2px'' = 0 \ldots 4)$$
$$x'''^2 + y'''^2 - 2px''' - 2qy''' = 0 \ldots 5)$$

erfüllt werden, aus denen sich

$$p = \frac{x''}{2} \ldots 6)$$
$$q = \frac{x'''^2 + y'''^2 - x''x'''}{2y'''} \ldots 7)$$

ergibt und durch Substituzion in 3)

$$x^2 + y^2 - x'x - \frac{x'''^2 + y'''^2 - x''x'''}{y'''} \cdot y = 0 \; . \; . \; . \; 8)$$

als die Gleichung des gesuchten Kreises.

Da man die Werthe für p und q, daher vermöge 2) auch $a = \sqrt{p^2 + q^2}$ kennt, so läßt sich mit Hilfe dieser Größen der Kreis, welcher durch die Punkte M', M'', M''' geht, auch wirklich konstruiren. Diese Konstrukzion würde sich übrigens sehr zusammengesetzt herausstellen, daher es zweckmäßiger sein wird, zur Beschreibung des fraglichen Kreises einen andern einfachern Weg einzuschlagen. Offenbar kommt es nur darauf an, daß man den Mittelpunkt C des zu beschreibenden Kreises finde; dieser aber wird durch die Koordinaten p und q, welche sich aus den Gleichungen 7) und 8), oder auch aus den Gleichungen 7) und 6) ergeben, bestimmt. Die Gleichungen 7) und 6) gehören nun, wenn man darin p und q als die veränderlichen Koordinaten ansieht, zwei geraden Linien an, und zwar hat ihr Durchschnittspunkt die aus der Verbindung beider Gleichungen hervorgehenden Werthe von p und q, also gerade die Werthe in 7) und 6) zu Koordinaten, er ist somit eben der gesuchte Mittelpunkt des Kreises. Es handelt sich also nur darum, die zu den Gleichungen 7) und 6) gehörigen Geraden zu konstruiren; ihr Durchschnitt ist dann der gesuchte Mittelpunkt.

Die erstere Gleichung $p = \frac{x''}{2}$, wo p die Abscisse vorstellt, gehört einer Geraden an, welche auf der Abscissenaxe M'Y in dem Abstande

$$\frac{x''}{2} = \frac{M'M''}{2}$$

senkrecht steht; sie ist also die Gleichung der Geraden NN', wenn N der Halbirungspunkt der M'M'', und NN' ⊥ M'M'' ist. Die andere Gleichung 6), welche sich auch so darstellen läßt:

$$q - \frac{y'''}{2} = - \frac{x'''}{y'''}\left(x - \frac{x'''}{2}\right),$$

drückt eine Gerade aus, welche durch den Punkt $\frac{x'''}{2}$, $\frac{y'''}{2}$ geht und auf der Geraden, deren Gleichung $y = \frac{y'''}{x'''}x$ ist, senkrecht steht; der Punkt $\frac{x'''}{2}$, $\frac{y'''}{2}$ ist nun der Halbirungspunkt P'' der Geraden M'M''', und die Gerade, für welche die Gleichung $y = \frac{y'''}{x'''}x$ Statt findet, ist M'M'''; die Gleichung 6) kommt daher der Geraden P''P' zu, wenn P''P' ⊥ M'M'' gezogen wird. Der Durchschnitt C der beiden Geraden NN' und P''P' ist der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises.

Um daher den Mittelpunkt des Kreises zu finden, der durch drei gegebene Punkte geht, darf man nur zwischen diesen Punkten zwei Gerade ziehen, dieselben halbiren und in den Halbirungspunkten Senkrechte errichten; der Durchschnitt dieser Senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt.

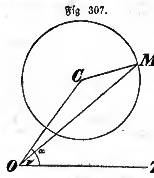
Es ist offenbar dasselbe Verfahren, das wir schon in der Planimetrie auf einem andern Wege begründet haben.

§. 276.

6. Polargleichung des Kreises.

1) Ist der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Pol des Polar-Koordinatensystems, so ist $r = a$ die Polargleichung des Kreises, wo a den Halbmesser des Kreises und r den in seiner Richtung veränderlichen Radiusvektor bedeutet.

Fig 307.



2. Liegt der Pol O (Fig. 307) nicht im Mittelpunkte C des Kreises, so sei $OC = \rho$ der Leitstrahl des Mittelpunktes, und $COZ = \alpha$ der Winkel, den dieser Leitstrahl mit der Polaraxe OZ bildet. Ist nun M irgend ein Punkt der Kreislinie, also $r = OM$ sein Leitstrahl und $v = MOZ$ der Winkel desselben mit der Polaraxe, so erhält man, wenn der Halbmesser $CM = a$ gesetzt wird, aus dem Dreiecke CMO

$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM \,.\, OC \,.\, \cos COM,$$

oder $\quad a^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - v),$

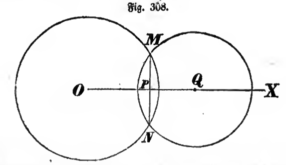
woraus $\quad r = \rho\cos(\alpha - v) \pm \sqrt{a^2 - \rho^2\sin^2(\alpha - v)}$

als allgemeine Polargleichung des Kreises folgt.

§. 277.

7. Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung zweier Kreise.

Fig. 308.



Es seien O und Q (Fig. 308) die Mittelpunkte zweier Kreise, $OQ = d$ ihre Entfernung und R und r die Halbmesser der Kreise. Man kann unbe-

schadet der Allgemeinheit der Aufgabe O als Anfangspunkt der Koordinaten, und die durch O und Q gehende Gerade OX als Abscissenaxe annehmen; dann sind die Gleichungen der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{und} \quad (x-d)^2 + y^2 = r^2.$$

Die Koordinaten eines jeden, den beiden Kreislinien gemeinschaftlichen Punktes müssen diesen beiden Gleichungen Genüge leisten, und umgekehrt gehören zwei Koordinaten, welche diesen Gleichungen genügen, zu einem Durchschnittspunkte der beiden Kreislinien. Zur Bestimmung der Koordinaten der Durchschnittspunkte wird man also die beiden Gleichungen mit einander verbinden und daraus x und y bestimmen. Zieht man zu diesem Ende die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$x^2 - (x-d)^2 = R^2 - r^2 \quad \text{oder} \quad 2dx - d^2 = R^2 - r^2,$$

woraus
$$x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so findet man

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{4d^2R^2 - (d^2 + R^2 - r^2)^2}.$$

Die Gleichungen der beiden Kreise lassen also nur zwei Auflösungen zu, woraus folgt, daß zwei Kreislinien, wofern sie nicht in eine zusammenfallen, nicht mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben können.

Da die beiden Durchschnittspunkte M und N eine gemeinschaftliche Abscisse OP, aber zwei gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten MP und NP haben, so ergibt sich daraus der Satz: *Wenn sich zwei Kreislinien schneiden, so steht die Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht auf der Mitte der Sehne, welche die Durchschnittspunkte verbindet.*

1) Damit wirklich ein Durchschnittspunkt Statt finde, muß y reel, folglich die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv sein. Um zu erkennen, wann diese Bedingung eintritt, wollen wir den Ausdruck für y auf eine andere Form bringen. Da nämlich die Größe unter dem Wurzelzeichen die Differenz zweier Quadrate ist, so kann man auch schreiben

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(2dR + d^2 + R^2 - r^2)(2dR - d^2 - R^2 + r^2)}$$

oder

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{[(d+R)^2 - r^2] \cdot [r^2 - (d-R)^2]};$$

und da hier jeder Faktor selbst wieder eine Differenz zweier Quadrate ist, so hat man auch

$$y = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(d+R+r)(d+R-r)(r+d-R)(r-d+R)}.$$

Es ist uns immer gestattet, den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt des größeren Kreises zu versetzen, wo dann d positiv und $R \geqq r$ wird. Unter dieser Voraussetzung sind die Faktoren $d+R+r$ und $d+R-r$ immer positiv, und damit y reel sei, müssen die beiden

andern Faktoren entweder beide positiv, oder beide negativ sein; man muß also entweder

$$r + d > R \quad \text{und} \quad r + R > d,$$

$$\text{oder} \quad r + d < R \quad \text{und} \quad r + R < d$$

haben. Letzteres ist nicht möglich, da sonst $d < R$ und zugleich $d > R$ sein müßte, was einen Widerspruch enthält. Die Bedingungen für den Durchschnitt zweier Kreise sind also

$$r + d > R \quad \text{und} \quad r + R > d,$$

und da immer auch $d + R > r$ ist, so folgt, daß sich zwei Kreise nur dann schneiden, wenn von den drei Größen d, R, r je zwei zusammen größer sind als die dritte, also nur dann, wenn sich aus den drei Linien d, R, r ein Dreieck konstruiren läßt.

2) Sollen sich die beiden Kreise berühren, so müssen die zwei Punkte M und N in einen einzigen zusammenfallen, somit vollkommen gleiche Koordinaten haben, was aber nur dann möglich ist, wenn $y = 0$ ist, d. i. wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen verschwindet. Dieses kann nun, da wir die ersten zwei Faktoren nach den früheren Bemerkungen stets als positiv ansehen dürfen, nur dann der Fall sein, wenn

$$\text{entweder} \quad r + d - R = 0 \quad \text{oder} \quad r + R - d = 0$$

ist, wenn also eine der zwei Bedingungsgleichungen

$$d = R - r, \quad d = R + r$$

erfüllt wird.

Zwei Kreise können sich also nur dann berühren, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich ist dem Unterschiede oder der Summe ihrer Halbmesser.

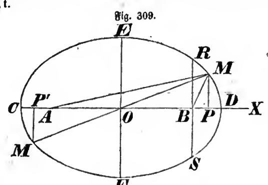
b) Die Ellipse.

§. 278.

Bei der Ableitung der Gleichung für die Ellipse wird man ihre Haupteigenschaft, daß nämlich die Summe der Entfernungen jedes ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten gleich ist einer gegebenen Geraden, zu Grunde legen.

1. Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprunge und deren große Axe in der Abscissenaxe liegt.

Fig. 309.



Es seien A und B (Fig. 309) die Brennpunkte der Ellipse. Halbirt man AB im Punkte O, nimmt O als Anfangspunkt der Koordinaten und OX als Abscissenaxe an, so ist für irgend einen Punkt M

$$x = OP, \quad y = MP.$$

Ist nun M ein Punkt der Ellipse, so sind AM und BM seine Leitstrahlen, und zwar ist

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2}, \qquad BM = \sqrt{BP^2 + MP^2},$$

oder wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \qquad BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Da nun M ein Punkt der Ellipse sein soll, so muß die Summe der beiden Leitstrahlen gleich sein einer gegebenen Geraden, deren Länge 2a heißen mag; man hat daher

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a,$$

und wenn diese Gleichung razional gemacht wird,

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Im Dreiecke ABM ist nun $AM + BM > AB$, also $2a > 2e$, oder $a > e$, daher auch $a^2 > e^2$, und somit der Unterschied $a^2 - e^2$ positiv. Drückt man nun $a^2 - e^2$ durch die gewiß positive Größe b^2 aus, indem man $a^2 - e^2 = b^2$ setzt, so hat man

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

als die Relazion, welche zwischen den Koordinaten des in der Ellipse willkürlich angenommenen Punktes M Statt findet, folglich als die Gleichung der Ellipse selbst.

Diese Gleichung läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 279.

2. Diskussion der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

1) Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

woraus hervorgeht, daß zu jedem Werthe von x, für welchen y reel ausfällt, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y gehören, daß sich also die Ellipse zu beiden Seiten der Abscissenaxe gleichförmig ausdehnt.

2) Bestimmt man aus der Gleichung der Ellipse den Werth von x, so ergibt sich $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, woraus folgt, daß zu jeder Ordinate y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe der Abscisse x gehören, daß sich also die Ellipse auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe gleichförmig ausdehnt.

Die Ellipse wird also durch die beiden Koordinatenaxen in vier kongruente Aeste getheilt.

3) Aus $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ folgt für $y = 0$, $x = \pm a$; und

aus $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ für $x = 0$, $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die Abscissenaxe in den Abständen $+a$ und $-a$, und die Ordinatenaxe in den Abständen $+b$ und $-b$ vom Anfangspunkte.

4) Der größte Werth, den x annehmen kann, ist a, und der größte Werth von y ist b; für $x > a$ wird y, für $y > b$ wird x imaginär. Zieht man daher mit der Ordinatenaxe in den Abständen $+a$ und $-a$, mit der Abscissenaxe aber in den Abständen $+b$ und $-b$ parallele Gerade, welche ein Rechteck bilden, so wird die ganze Ellipse innerhalb dieses Rechteckes enthalten sein. Daraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

5) Ist $y = a'x$ die Gleichung irgend einer durch den Anfangspunkt O gezogenen Geraden MM', so erhält man für die Durchschnittspunkte derselben mit der Ellipse, deren Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ ist, die Koordinaten

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 a'^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{aa'b}{\sqrt{a^2 a'^2 + b^2}},$$

wobei die obern Zeichen dem Punkte M, die untern jenem M' entsprechen. Die Abscissen der Punkte M und M', eben so die Ordinaten derselben, haben also gleiche numerische Werthe, es ist nämlich $OP = OP'$, $MP = M'P'$; daher sind in den rechtwinkligen Dreiecken MPO und M'P'O auch die dritten Seiten OM und OM' gleich, oder es wird die Sehne MM' in O halbirt. Da MM' eine willkürliche durch O gezogene Sehne bedeutet, so folgt, daß alle durch den Ursprung O gezogenen Sehnen in diesem Punkte halbirt werden. Der Punkt O heißt daher der **Mittelpunkt**, und jede durch ihn gehende Sehne ein **Durchmesser** der Ellipse.

6) Drückt man den halben zu dem Punkte M gehörigen Durchmesser, nämlich OM oder OM' durch d aus, so ist $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, oder wegen

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

auch
$$d = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Da nun dieser Ausdruck für $x = 0$ den kleinsten Werth annimmt, so ist der kleinste halbe Durchmesser $d = \sqrt{b^2} = \pm b = OE = OF$. Dagegen nimmt jener Ausdruck den größten Werth an, wenn x den größten Werth, dessen es fähig ist, erreicht hat, also für $x = \pm a$; dafür erhält man somit den größten halben Durchmesser $d = \sqrt{a^2} = \pm a = OD = OC$. Es ist daher unter allen Durchmessern der Ellipse jener CD der größte und EF der kleinste. Den Durchmesser $CD = 2a$ nennt man darum die **große** oder **erste**, jenen $EF = 2b$ die **kleine** oder **zweite Axe** der Ellipse; die Punkte C und D heißen die **Scheitel**.

7) Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte A und B gegen den Mittelpunkt O folgt aus $a^2 - e^2 = b^2$,

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

welche Größe die **Exzentrizität** der Ellipse ist.



In der Astronomie versteht man unter der Exzentrizität gewöhnlich das Verhältniß zwischen e und der halben großen Axe a, also $\frac{e}{a}$, und drückt dieses durch ε aus, so daß

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ ist.}$$

8) Je kleiner die Exzentrizität ist, desto weniger ist a von b unterschieden, und desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $e = 0$ wird $a = b$ und die Gleichung der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ geht über in die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Der Kreis kann daher als eine Ellipse betrachtet werden, deren Exzentrizität Null ist, deren beide Axen daher gleich sind.

9) Bezeichnet man die Leitstrahlen des Punktes M, AM und BM durch r und r′, so hat man

$$r = AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{(x+e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$
$$= \sqrt{a^2 + 2ex + \frac{e^2 x^2}{a^2}},$$
$$r' = BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{(x-e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$
$$= \sqrt{a^2 - 2ex + \frac{e^2 x^2}{a^2}}$$

oder

$$r = a + \frac{ex}{a},$$
$$r' = a - \frac{ex}{a}.$$

10) Um die durch die Brennpunkte gehenden Ordinaten zu erhalten, setzt man in

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

wodurch man

$$y = \pm \frac{b^2}{a} = BR = BS$$

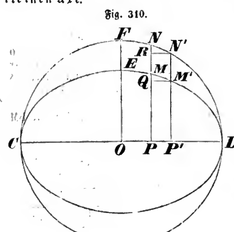
erhält. Die durch einen Brennpunkt senkrecht auf die große Axe gezogene Sehne RS heißt der **Parameter** der Ellipse, und wird durch 2p bezeichnet. Es ist daher der halbe Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, woraus $a : b = b : p$ folgt, d. h. **der halbe Parameter ist die dritte stetige Proporzionale zu der halben großen und der halben kleinen Axe.**

§. 280.

11) Aus der Gleichung der Ellipse in Verbindung mit jener des Kreises ergibt sich folgender Satz:

Wenn man über der großen Axe einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so verhalten sich die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten des Kreises und der Ellipse, wie die halbe große zur halben kleinen Axe.

Fig. 310.



Setzt man (Fig. 310) OP = x, MP = y und NP = y', so ist

$$y'^2 = a^2 - x^2,$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

daher

$$\frac{y'^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

und

$$y' : y = a : b.$$

12) Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun auch der Flächeninhalt der Ellipse bestimmen.

Sind MP und M'P' die Ordinaten der Ellipse, NP und N'P' die Ordinaten des über CD beschriebenen Kreises, welche zu den Abscissen OP und OP' gehören, und zieht man M'Q und N'R parallel mit der Axe CD, so haben die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR dieselbe Grundlinie und verhalten sich daher so wie ihre Höhen; somit ist M'P'PQ : N'P'PR = M'P' : N'P' = b : a. Denkt man sich nun die Ordinaten NP und N'P unendlich nahe an einander, so können die Dreiecke MM'Q und NN'R als unendlich klein vernachläßiget, und folglich die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR als Elemente der Ellipse und des Kreises betrachtet werden. Stellt man sich die Ellipse und den Kreis aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so verhält sich jedes Element der Ellipse zu dem entsprechenden Elemente des Kreises, und somit auch die Summe aller Elemente der Ellipse zur Summe aller Kreiselemente, wie b : a. Aber letztere Summe ist die Kreisfläche, folglich $= a^2\pi$, erstere Summe die Fläche der Ellipse; heißt diese f, so hat man also $f : a^2\pi = b : a$, woraus $f = ab\pi$ folgt.

Der Flächeninhalt einer Ellipse ist demnach gleich dem Produkte der beiden Halbaxen multiplizirt mit der Ludolfischen Zahl.

§. 281.

3. Gleichung der Ellipse, wenn der Ursprung in einem Scheitel liegt, und die Abscissen an der großen Axe gezählt werden.

Nimmt man den Scheitel C als Anfangspunkt der Koordinaten, und die große Axe CD als Abscissenaxe an, so werden für dieses neue Koordi-

natensystem die Ordinaten dieselben bleiben, wie in dem früher zu Grunde gelegten Systeme, die neuen Abscissen dagegen werden sämmtlich um die halbe große Axe a größer ausfallen als die frühern. Man darf daher in der oben entwickelten Gleichung $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ bloß $x - a$ statt x setzen und y ungeändert lassen, um die Gleichung der Ellipse für das neue System zu erhalten. Diese nimmt daher folgende Gestalt an

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2),$$

und wenn $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt wird,

$$y^2 = \frac{p}{a} (2ax - x^2),$$

oder

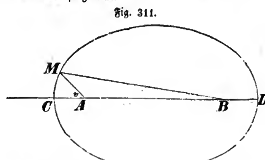
$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

§. 282.

4. Polargleichung der Ellipse.

Es sei A (Fig. 311) der Pol und AC die Polaraxe; so ist für den Punkt M der Radiusvektor $r = AM$, und der Polarwinkel $v = MAC$. Aus dem Dreiecke ABM folgt nun

Fig. 311.



$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \,.\, AB . \cos BAM,$$

oder

$$BM^2 = r^2 + 4e^2 + 4er \cos v.$$

Wegen $AM + BM = 2a$ ist auch

$$BM^2 = (2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

daher

$$r^2 + 4e^2 + 4er \cos v = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

woraus

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos v} \;\ldots\; 1)$$

als die Polargleichung für die Ellipse folgt.

In der Anwendung auf Astronomie, wo $\frac{e}{a} = \varepsilon$, also $e = a\varepsilon$ gesetzt wird, nimmt die Gleichung die Form an

$$r = \frac{a^2 - a^2 \varepsilon^2}{a + a\varepsilon \cos v},$$

oder
$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos v} \quad \ldots \; 2)$$

Wollte man in dieser Gleichung statt a den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ einführen, so erhält man aus $e^2 = a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon$, $a^2(1 - \varepsilon^2) = b^2$, oder $a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} = p$. Die Gleichung 2) gehet also in die folgende über

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v} \quad \ldots \; 3)$$

Für die verschiedenen Werthe von $v = 0$ bis $v = 360°$ erhält man alle möglichen Werthe für $r = AM$, und dadurch alle möglichen Punkte der Ellipse.

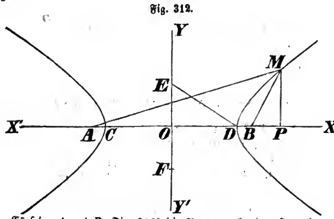
c) Die Hyperbel.

§. 283.

Die Hyperbel hat die Eigenschaft, daß der Unterschied der Abstände eines jeden ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten einer gegebenen Geraden gleich ist. Diese Eigenschaft in die analytische Zeichensprache übersetzt, gibt uns die Gleichung für die Hyperbel.

1. **Gleichung der Hyperbel, wenn der Mittelpunkt im Ursprunge und die erste Axe in der Abscissenaxe liegt.**

Fig. 312.



Es seien A und B (Fig. 312) die Brennpunkte der Hyperbel. Halbirt man den Abstand AB in O, und nimmt diesen Punkt als Anfangs-

punkt der Koordinaten und OX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punkt M $x = OP$, $y = MP$. Damit der Punkt M in der Hyperbel liege, muß $AM - BM$ gleich sein einer Geraden von gegebenerer Länge, die durch $2a$ ausgedrückt werden soll. Man hat nun, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2};$$

daher muß

$$\sqrt{(x + e^2) + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

sein, oder wenn die Gleichung razional gemacht wird,

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Im Dreiecke ABM ist $AM - BM < AB$; es muß daher $2a < 2e$, oder $a < e$, folglich auch $a^2 < e^2$, und somit $a^2 - e^2$ negativ sein. Setzt man $a^2 - e^2$ der gewiß negativen Größe $-b^2$ gleich, so erhält man

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

oder

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

als die gesuchte Gleichung der Hyperbel, welche sich auch so darstellen läßt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 284.

2. Diskussion der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

1) Diese Gleichung, nach y aufgelöset, gibt $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. So lange $x < a$ ist, fällt y imaginär aus; für solche Abscissen gibt es also keinen Punkt der Hyperbel. Wird $x \geq a$ angenommen, so erhält man für y zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe; die Abscissenaxe halbirt daher alle auf ihr senkrechten Sehnen der Hyperbel.

2. Löst man die Gleichung der Hyperbel nach x auf, so ergibt sich

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2};$$

woraus folgt, daß zu jedem Werthe von y zwei gleiche und entgegengesetzte Abscissen gehören; die Hyperbel erstreckt sich also in kongruenten Aesten zu beiden Seiten der Ordinatenaxe.

3) Für $y = 0$ wird $x = \pm a$; die Hyperbel schneidet also die Abscissenaxe in zwei Punkten D und C, deren Abstand $2a$ beträgt. Die Gerade $CD = 2a$ ist die erste oder Hauptaxe der Hyperbel; C und D nennt man die Scheitel.

4) Da x und y jeden noch so großen Werth annehmen können, so folgt, daß die Hyperbel nicht so, wie der Kreis oder die Ellipse, in sich selbst zurückkehrt, sondern daß sich ihre Aeste ins Unendliche ausdehnen.

5) Um die Bedeutung von b auszumitteln, beschreibe man aus dem Scheitel D mit $OB = e$ als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Ordinatenaxe in den Punkten E und F schneidet und ziehe DE. Es ist nun

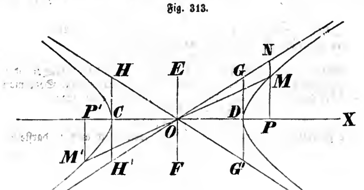
$$EO^2 = FO^2 = DE^2 - DO^2 = e^2 - a^2 = b^2,$$

daher $EO = FO = b$, und $EF = 2b$. Man nennt nun, analog mit der

Ellipse, die Gerade EF = 2b auch eine Axe und zwar die zweite oder konjugirte Axe.

6. Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel auch die Gleichung $y = a'x$ einer durch O (Fig. 313) gezogenen Geraden M M so erhält man für die Durchschnittspunkte der beiden Linien:

Fig. 313.



$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2a'^2}}$$

$$y = \pm \frac{aa'b}{\sqrt{b^2 - a^2a'^2}},$$

wobei das obere Zeichen dem Punkte M, das untere jenem M entspricht. Es ist somit OP = OP', MP = MP', und daher in den rechtwinkligen Dreiecken MPO und M'P'O auch OM = OM', d. h. die Sehne MM' wird im Punkte O halbirt. Da dasselbe auch von jeder andern Sehne gilt, so wird dieser Punkt O der Mittelpunkt, und jede durch O gezogene Sehne ein Durchmesser der Hyperbel genannt.

Aus den obigen Werthen von x und y folgt, daß ein Durchschnitt mit der Hyperbel nur für solche Gerade möglich ist, bei denen $b^2 > a^2a'^2$ oder $a' < \frac{b}{a}$ ist; wird $a' > \frac{b}{a}$, so fallen die Werthe von x und y imaginär aus.

7) Besonders merkwürdig sind jene Geraden, für welche

$$a' = \pm \frac{b}{a},$$

also $b^2 = a^2a'^2$ ist; für diese werden die Werthe von x und y unendlich groß, was anzeigt, daß die beiden Geraden mit der Hyperbel zu beiden Seiten erst in unendlicher Entfernung zusammentreffen.

Um diese zwei geraden Linien zu konstruiren, errichte man im Scheitel D eine Senkrechte, trage darauf DG = DG' = b auf, und ziehe durch den Mittelpunkt O und die Punkte G und G' die Geraden GOH' und G'OH; man hat für diese in der That

$$\tang GOD = \frac{b}{a} \qquad \text{und} \qquad \tang HOD = -\frac{b}{a}.$$

Betrachtet man nun eine dieser Geraden, z. B. GH', so ist, wenn $OP = x$, $MP = y$, $NP = y'$ gesetzt wird, $y' = \frac{b}{a} x$ und $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$; ferner da M ein Punkt der Hyperbel ist, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; daher $y'^2 - y^2 = b^2$, oder $(y' + y)(y' - y) = b^2$, woraus

$$y' - y = \frac{b^2}{y' + y}$$

folgt. Da b^2 für dieselbe Hyperbel eine unveränderliche Größe ist, y' und y dagegen, somit auch ihre Summe $y' + y$ ins Unendliche fort zunehmen kann; so wird der Bruch $\frac{b^2}{y' + y}$, mithin auch der Unterschied $y' - y$, welcher die Linie MN vorstellt, desto kleiner werden, je größer die Abscisse OP ist, ohne jedoch jemals vollkommen in Null zu übergehen. Die Gerade GH' wird daher der Hyperbel, je weiter man beide verlängert, immer näher kommen, sie jedoch nie vollkommen erreichen. Dasselbe gilt von der Geraden G'H. Die zwei Geraden GH' und G'H werden wegen dieser Eigenschaft **Assymptoten** der Hyperbel genannt.

8) Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte A und B gegen den Mittelpunkt O hat man

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Die Größe e oder auch $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ wird die **Exzentrizität** der Hyperbel genannt.

9) Für die Leitstrahlen r und r' des Punktes M hat man

$$r = AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{(x+e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2 x^2}{a^2} + 2ex + a^2},$$

$$r' = BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{(x-e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2 x^2}{a^2} - 2ex + a^2};$$

oder

$$r = \frac{ex}{a} + a,$$

$$r' = \frac{ex}{a} - a.$$

10) Auch in der Hyperbel wird die durch den Brennpunkt senkrecht auf die erste Axe gezogene Sehne der **Parameter** genannt und durch 2p bezeichnet. Da der halbe Parameter p der im Brennpunkte errichteten Ordinate gleich ist, so braucht man zur Bestimmung desselben nur in

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},\ x^2 = e^2 = a^2 + b^2$$

zu setzen; man erhält dadurch $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Es ist somit $p = \frac{b^2}{a}$ oder $a : b = b : p$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zwischen der halben ersten und der halben zweiten Axe.

11) Für $a = b$ wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt; ihre Gleichung ist $y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$.

§. 285.

3. Gleichung der Hyperbel, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten in einem Scheitel liegt.

Nimmt man den Scheitel D als Ursprung und DX als die Abscissenaxe an, so bleiben die Ordinaten gegen das frühere System ungeändert, die früheren Abscissen aber sind sämmtlich um a größer als die neuen; um daher die neue Gleichung zu erhalten, darf man in der frühern Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

nur $x + a$ statt x setzen; man bekommt dadurch

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + 2ax},$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

und wenn man $\frac{b^2}{a} = p$ setzt,

$$y^2 = \frac{p}{a} (2ax + x^2),$$

oder

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

§. 286.

4. Polargleichung der Hyperbel.

Ist B (Fig. 314) der Pol und BD die Polaraxe, so hat man für den Punkt M $r = BM$, $v = MBD$.

Aus dem Dreiecke ABM folgt nun

$$AM^2 = BM^2 + AB^2 - 2BM \cdot AB \cdot \cos ABM$$

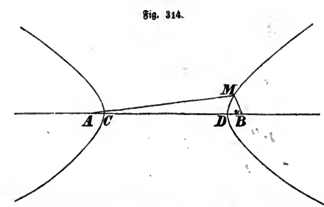
oder

$$AM^2 = r^2 + 4e^2 - 4er \cos v.$$

Wegen $AM - BM = 2a$ ist aber auch

$$AM^2 = (2a + r)^2 = 4a^2 + 4ar + r^2.$$

Fig. 314.



Setzt man nun diese beiden Werthe von AM^2 einander gleich, so erhält man

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e \cos v} \ldots 1)$$

als die gesuchte Polargleichung.

Würde man $\frac{e}{a} = \epsilon$ setzen, so erhielte man

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 + \epsilon \cos v} \ldots 2)$$

oder, wenn die Größe $p = \frac{b^2}{a} = a(\epsilon^2 - 1)$ eingeführt wird,

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos v} \ldots 3)$$

Setzt man für v alle möglichen Werthe von 0 bis 360°, so erhält man für den Radiusvektor $r = BM$ die entsprechenden Werthe, wodurch alle Punkte der Hyperbel bestimmt werden.

d) Die Parabel.

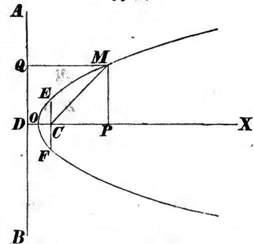
§. 287.

Die karakteristische Eigenschaft der Parabel besteht darin, daß jeder Punkt derselben von dem Brennpunkte eben so weit absteht als von der Richtungslinie.

1. Gleichung der Parabel, wenn der Ursprung im Scheitel liegt und die Abscissen auf der Axe derselben gezählt werden.

Es sei AB (Fig. 315) die Richtungslinie und C der Brennpunkt der Parabel. Zieht man $CD \perp AB$, halbirt die CD im Punkte O, und nimmt O als Anfangspunkt der Koordinaten und OX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punkt M $x = OP$, $y = MP$.

Fig. 315.



Zieht man $MQ \perp AB$, so muß, wenn M in der Parabel liegen soll, $CM = MQ$ sein. Nun ist, wenn $OC = \frac{p}{2}$ gesetzt wird,

$$CM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},\ MQ = DP = x + \frac{p}{2}$$

daher

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

woraus

$$y^2 = 2px$$

als die gesuchte Gleichung der Parabel folgt.

§. 288.

2. Diskussion der Gleichung $y^2 = 2px$.

1) Aus dieser Gleichung ergibt sich $y = \pm\sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werthe von x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel dehnt sich also vom Anfangspunkte an zu beiden Seiten der Abscissenaxe in zwei kongruenten Aesten aus, und zwar, da x und y jede beliebige Größe erreichen können, ins Unendliche fort. Die Gerade OX heißt darum die Axe der Parabel.

2) Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; der Anfangspunkt der Koordinaten ist also ein Punkt der Parabel, er heißt der Scheitel.

3) Für ein negatives x wird y imaginär; negativen Abscissen entsprechen daher keine Punkte der Parabel.

4) Setzt man $x = \frac{p}{2} = OC$, so wird $y = CE = CF = \pm p$; daher ist $EF = 2p$. Die Größe 2p stellt also die durch den Brennpunkt senkrecht auf die Axe gezogene Sehne EF vor, und ist der Parameter der Parabel.

5) Sind x' und x'' die Abscissen, y' und y'' die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte einer Parabel, deren Parameter $2p$ ist, so hat man

$$y'^2 = 2px' \quad \text{und} \quad y''^2 = 2px'',$$

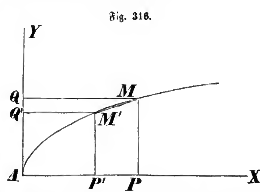
daher

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

d. h. in der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, so wie die zugehörigen Abscissen.

6) Mit Hilfe der Gleichung der Parabel ist man nun auch im Stande, die Fläche eines von zwei zusammengehörigen Koordinaten abgeschnittenen Parabelstückes zu bestimmen.

Fig. 316.



Es sei AM (Fig. 316) ein parabolischer Bogen und AX die Axe der Parabel; es soll die Fläche des Parabelstückes AMP gefunden werden.

Man ziehe AY $\perp$ AX, und fälle von den Punkten M, M' auf AX die Senkrechten MP, M'P' und auf AY die Lothe MQ, M'Q'. Heißen nun x, y die Koordinaten des Punktes M, und x', y' jene des Punktes M, so ist, wenn man die Sehne MM' zieht,

$$\text{Trapez } MM'P'P = (y+y') \cdot \frac{x-x'}{2} = (y+y') \cdot \frac{y^2-y'^2}{4p} = \frac{(y+y')^2}{2p} \cdot \frac{y-y'}{2},$$

$$\text{Trapez } MM'Q'Q = (x+x') \cdot \frac{y-y'}{2},$$

daher

$$\frac{\text{Trap. } MM'P'P}{\text{Trap. } MM'Q'Q} = \frac{(y+y')^2}{2p(x+x')}.$$

Läßt man nun die Punkte M und M' unendlich nahe an einander legen, unter welcher Annahme $y+y'$ in $2y$ und $x+x'$ in $2x$ übergeht, so kann man das Trapez MM'P'P als ein Element des gesuchten Parabelstückes AMP, und das Trapez MM'Q'Q als ein Element der außerhalb der Parabel liegenden Fläche AMQ betrachten, und es ist

$$\frac{MM'P'P}{MM'Q'Q} = \frac{4y^2}{4px} = \frac{y^2}{px} = 2,$$

also

$$MM'P'P = 2MM'Q'Q.$$

Stellt man sich nun die Flächen AMP und AMQ aus lauter solchen

Elementen bestehend vor, so ist jedes Element der Fläche AMP doppelt so groß als das entsprechende Element der Fläche AMP, und somit auch die ganze Fläche AMP doppelt so groß als AMQ, also

$$2AMQ = AMP,$$

und $$3AMQ = AMP + AMQ = APMQ = xy;$$

daher $$AMQ = \frac{1}{3}xy,$$

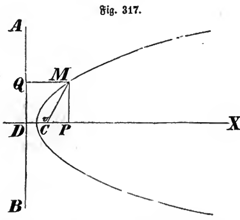
und $$AMP = \frac{2}{3}xy;$$

d. h. der Flächeninhalt des zwischen zwei zusammengehörigen Koordinaten eingeschlossenen Parabelstückes ist gleich $\frac{2}{3}$ des Produktes aus diesen Koordinaten.

§. 289.

3. Polargleichung der Parabel.

Fig. 317.



Es sei C (Fig. 317) der Pol und CD die Polaraxe, so ist für den Punkt M $r = CM$, $v = MCD$. Soll M ein Punkt der Parabel sein, so muß die Gleichung $CM = MQ$ Statt finden. Nun ist

$$CM = r, \quad MQ = DP = DC + CP = p - r\cos v,$$

daher $$r = p - r\cos v$$

oder $$r = \frac{p}{1 + \cos v}$$

als die Polargleichung der Parabel.

Für $v = 0, 90^0, 180^0, 270^0$

wird $r = \frac{p}{2}, \quad p, \quad \infty, \quad p;$

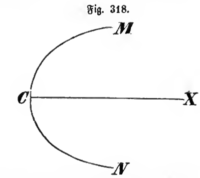
wie es der Natur der Parabel gemäß sein muß.

c. Wechselseitige Beziehungen der Kurven zweiter Ordnung.

§. 290.

1. Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten.

Fig. 318.



Ist C (Fig. 318) der Anfangspunkt der Koordinaten, CX die Abscissenaxe, und denkt man sich C als Endpunkt eines Kreisdurchmessers, oder als Scheitel einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, so ist

die Gleichung des Kreises . . . $y^2 = 2ax - x^2$,

" " der Ellipse . . . $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$,

" " " Hyperbel. . . $y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$,

" " " Parabel . . . $y^2 = 2px$,

wo a in Bezug auf den Kreis den Halbmesser, für die Ellipse und Hyperbel aber die halbe erste Axe und p den halben Parameter vorstellt.

Vergleicht man zuerst die Gleichung des Kreises und jene der Ellipse, so sieht man, daß die letztere in die erstere übergeht, wenn $p = a$ gesetzt wird. In der That ist der Kreis eine Ellipse, deren Brennpunkte in den Mittelpunkt fallen; der Parameter wird unter dieser Voraussetzung zu einem Durchmesser und daher wirklich $p = a$.

Die Gleichung der Ellipse kann auch in jene der Parabel übergehen. Läßt man nämlich in der Gleichung

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

die Größe a ohne Ende zunehmen, während p ungeändert bleibt, was bei gehöriger Annahme von b vermöge der Gleichung $\frac{b^2}{a} = p$ immer möglich ist; so wird endlich für $a = \infty$ der Quozient $\frac{px^2}{a} = 0$, und die Gleichung der Ellipse verwandelt sich in jene der Parabel $y^2 = 2px$. Die Parabel kann demnach als eine Ellipse angesehen werden, deren erste Axe unendlich groß ist.

Sämmtliche Linien der zweiten Ordnung lassen sich daher durch die einzige Gleichung

$$y^2 = Px + Qx^2$$

darstellen, worin P den Parameter und für den Kreis den Durchmesser bedeutet, und wobei für den Kreis $Q = -1$, für die Ellipse

$$Q = -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2},$$

also auch negativ aber < 1, für die Hyperbel

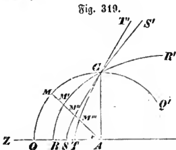
$$Q = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a^2}$$

positiv, und für die Parabel $Q = 0$ ist.

§. 291.

2. Polargleichungen.

Fig. 319.



Stellt A (Fig. 319) den Pol, AZ die Polaraxe vor, so hat man, wenn p beim Kreise den Halbmesser, bei den übrigen Kurven den halben Parameter bedeutet, folgende Polargleichungen:

für den Kreis . . . $r = p$,

„ die Ellipse . . . $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v}$,

für die Parabel . . . $r = \frac{p}{1 + \cos v}$,

„ „ Hyperbel . . . $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v}$;

wobei für die Ellipse $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, also $\varepsilon < 1$, für die Hyperbel dagegen $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, also $\varepsilon > 1$ ist.

Man kann demnach alle vier Kurven durch folgende allgemeine Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v} \quad . \; . \; . \; 1)$$

darstellen, worin

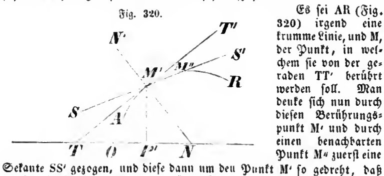
für den Kreis $\varepsilon = 0$
„ die Ellipse $\varepsilon < 1$
„ „ Parabel $\varepsilon = 1$
„ „ Hyperbel $\varepsilon > 1$ ist.

Denkt man sich aus demselben Brennpunkte A den Kreis, die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel mit demselben Parameter $AG = p$ beschrieben, so folgt aus der allgemeinen Gleichung 1), daß zu demselben Polarwinkel v, so lange $v < 90°$ ist, im Kreise ein größerer Leitstrahl gehört, als in der Ellipse, in dieser ein größerer als in der Parabel, in dieser wieder ein größerer als in der Hyperbel; d. h. der Kreis weicht von A am stärksten ab, weniger die Ellipse, noch weniger die Parabel, am wenigsten die Hyperbel. Für $v = 90°$ ist der Leitstrahl bei allen vier Kurven gleich p; es schneiden sich also dieselben in einem Punkte senkrecht über dem Brennpunkte. Wird $v > 90°$, so ist dann cos v negativ, daher r desto größer, je größer ε wird; nach dem eben erwähnten Durchschnittspunkte wird also der Kreis von dem Punkte A am wenigsten divergiren, mehr die Ellipse, noch stärker die Parabel, und am meisten die Hyperbel. Die vorliegende Figur, in welcher QMQ' die Kreislinie, RM'R' die Ellipse, SM''S' die Parabel, und TM'''T' die Hyperbel vorstellt, macht dieses Verhalten der vier krummen Linien anschaulich.

f. Berührungs- und Normallinien der Kurven zweiter Ordnung.

§. 292.

Hier erscheint es vor Allem nothwendig, für die Berührungslinie eine allgemeine, auf alle krummen Linien passende Erklärung, auf welche sich die Rechnung bequem anwenden läßt, aufzustellen.



Es sei AR (Fig. 320) irgend eine krumme Linie, und M' der Punkt, in welchem sie von der geraden TT' berührt werden soll. Man denke sich nun durch diesen Berührungspunkt M' und durch einen benachbarten Punkt M'' zuerst eine Sekante SS' gezogen, und diese dann um den Punkt M' so gedreht, daß der Punkt M'' jenem M' immer näher rückt; so wird sich auch die Sekante SS' der Berührungslinie TT' immer mehr nähern, und endlich mit ihr zusammenfallen, wenn der Punkt M'' über den Berührungspunkt M' zu liegen kommt.

Man kann daher die Tangente als eine Sekante betrachten, die zuerst durch zwei Punkte der Kurve geht, und sich dann um einen dieser Punkte, den Berührungspunkt, so lange drehet, bis der andere Punkt mit diesem zusammenfällt.

Eine im Berührungspunkte M' auf der Tangente senkrechte Gerade NN' heißt eine Normallinie oder Normale der Kurve.

Bei der Berührung einer krummen Linie mit einer Geraden sind nachstehende vier Größen, die von der Lage des Berührungspunktes M' abhängen, und über den Lauf der Kurve besondern Aufschluß gewähren, von großer Wichtigkeit:

1) Die Tangente M'T, d. i. das Stück der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe;
2) die Subtangente TP', d. i. das Stück der Abscissenaxe zwischen der Tangente und der Ordinate;
3) die Normale M'N, d. i. das Stück der Normallinie zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenaxe; und
4) die Subnormale NP', d. i. das Stück der Abscissenaxe zwischen der Normale und der Ordinate.

Von diesen vier Berührungsgrößen sind die Tangente und die Normale wesentlich positiv; die Subtangente und die Subnormale können positiv oder negativ sein, je nachdem erstere von T aus, letztere von P' aus, nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung hin, fällt.

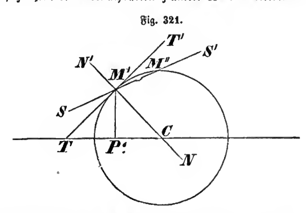
1. Berührung am Kreise.

§. 293.

a) Gleichungen der Berührungs- und der Normallinie.

Es seien x', y' die Koordinaten des Berührungspunktes M' (Fig. 321), und x'', y'' jene eines benachbarten Punktes M'' der Kreislinie.

Fig. 321.



Man hat nun für die Sekante SS', welche durch die Punkte x' y' und x'' y'' geht, die Gleichung

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \; . \; . \; . \; 1).$$

Da M' und M'' Punkte des Kreises sind, so müssen, wenn der Halbmesser durch a ausgedrückt wird, die Bedingungsgleichungen

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \quad x''^2 + y''^2 = a^2$$

Statt finden, durch deren Subtrakzion man

$$(x''^2 - x'^2) + (y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder

$$(x'' + x')(x'' - x') + (y'' + y')(y'' - y') = 0,$$

und daher

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{x'' + x'}{y'' + y'} \ldots 2)$$

bekommt. Wird dieser Werth in 1) substituirt, so erhält man für die Gleichung der Sekante SS'

$$y - y' = - \frac{x'' + x'}{y'' + y'} (x - x') \ldots 3)$$

Läßt man nun die Sekante SS' um den Punkt M' drehen, bis M'' mit M' zusammenfällt, so wird die Sekante in die Lage der Berührungslinie TT' kommen; und man erhält für diese, wenn in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$ gesetzt wird, die Gleichung

$$y - y' = - \frac{x'}{y'} (x - x') \ldots 4),$$

welche sich auch so darstellen läßt

$$yy' + xx' = x'^2 + y'^2$$

oder, weil $x'^2 + y'^2 = a^2$ ist,

$$yy' + xx' = a^2 \ldots 5).$$

In dieser letztern Form läßt sich die Gleichung der Tangente unmittelbar aus jener des Kreises

$$yy + xx = a^2$$

sehr leicht ableiten.

Die Größe $- \frac{x'}{y'}$ in 4) ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet.

Für die Normale NN', als eine durch den Punkt x' y' gehende Gerade, hat man erstlich die Gleichung

$$y - y' = a' (x - x') \ldots 6).$$

Da die Normale auf der Tangente senkrecht steht, so muß $a' = \frac{y'}{x'}$ sein, und die gesuchte Gleichung der Normallinie ist

$$y - y' = \frac{y'}{x'} (x - x')$$

oder

$$y = \frac{y'}{x'} x \ldots 7),$$

welche Gleichung einer durch den Ursprung, welcher hier der Mittelpunkt des Kreises ist, gehenden Geraden angehört; was ganz natürlich ist, da bekanntlich die Tangente auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht stehen muß.

§. 294.

b. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1) Um die Subtangente TP′ zu erhalten, suche man zuerst die Abscisse CT des Punktes T der Berührungslinie, also das x, welches aus der Gleichung der Tangente 5) für $y=o$ hervorgehet; man bekommt

$$CT = x = \frac{a^2}{x'}.$$

Nun ist $TP' = CT - CP' = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'}$; daher, wenn man beachtet, daß hier x′ negativ ist, die Subtangente aber positiv ausfallen muß,

$$\text{Subtangente } TP' = -\frac{y'^2}{x'} \ldots 2)$$

2) Zur Bestimmung der Tangente M′T hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke M′P′T

$$M'T^2 = M'P'^2 + TP'^2 = y'^2 + \frac{y'^4}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}(x'^2 + y'^2) = \frac{a^2y'^2}{x'^2},$$

daher $$\text{Tangente } M'T = \pm \frac{ay'}{x'} \ldots 9)$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, daß die Tangente positiv wird.

3) Für die Subnormale hat man

$$\text{Subnormale } CP' = -x' \ldots 10)$$

4) Endlich hat man noch

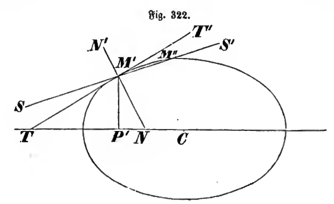
$$\text{Normale } M'C = a \ldots 11).$$

2. Berührung an der Ellipse.

§. 295.

a) Gleichungen der Berührungs- und der Normallinie.

Fig. 322.



Es seien x′, y′ die Koordinaten des Punktes M′ (Fig. 322) einer Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, und es soll die Gleichung der durch diesen Punkt M′ an die Ellipse geführten Tangente gefunden werden.

Nimmt man einen zweiten Punkt M″ der Ellipse an, dessen Koordinaten x″, y″ sind, so ist die Gleichung der durch M′ und M″ gehenden Sekante SS′

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \;.\;.\;.\; 1).$$

Für die Punkte M′ und M″ der Ellipse finden nun die Gleichungen

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2, \qquad b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$$

Statt, durch deren Subtrakzion man

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = o,$$

oder

$$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = o$$

und daher

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')} \;.\;.\;.\; 2)$$

erhält. Substituirt man diesen Werth in 1), so nimmt die Gleichung der Sekante SS′ die Form an:

$$y - y' = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x') \;.\;.\;.\; 3)$$

Fällt nun der Punkt M″ mit M′ zusammen, wo $x'' = x'$ $y'' = y'$ wird, so kommt die Sekante SS′ in die Lage der Tangente TT′; setzt man also in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$, so erhält man als die gesuchte Gleichung der Tangente TT′

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x') \;.\;.\;.\; 4)$$

wobei $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, den die Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet.

Die Gleichung 4) läßt sich auch so darstellen

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2y'^2 + b^2x'^2$$

oder, weil $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ ist,

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \;.\;.\;.\; 5),$$

welche Gleichung der Tangente sich unmittelbar aus jener der Ellipse

$$a^2yy + b^2xx = a^2b^2$$

sehr leicht herleiten läßt.

Für die durch den Punkt M′ gezogene Normallinie NN′, als eine auf der Tangente, zu welcher die Gleichung 4) gehört, senkrechte Gerade, ergibt sich die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \;.\;.\;.\; 6)$$

§. 296.

b) Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Um die Subtangente TP' zu finden, suche man zuerst die Abscisse CT des Punktes T, indem man in der Gleichung der Berührungslinie $y = o$ setzt, man erhält $CT = x = \frac{a^2}{x'}$; daher ist

$$TP' = CT - CP' = \frac{a^2}{x'} - x'.$$

Da nun hier die Subtangente positiv sein muß, die Größe

$$\frac{a^2}{x'} - x'$$

aber negativ ist, so hat man

$$\text{Subtangente } TP' = x' - \frac{a^2}{x'} \ldots 7)$$

2) Für die Tangente $M'T$ erhält man

$$M'T^2 = M'P'^2 + TP'^2 = y'^2 + \frac{(x'^2 - a^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^4}{b^4}\right)$$

daher

$$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'} \sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2} \ldots 8)$$

3) Um die Subnormale $P'N$ zu erhalten, suche man die Abscisse CN des Punktes N, indem man in der Gleichung der Normallinie $y = o$ setzt; man bekommt $CN = x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'$; somit ist

$$P'N = CP' - CN = x' - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x' = \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

Da aber hier die Subnormale positiv ist, so folgt

$$\text{Subnormale } P'N = -\frac{b^2 x'}{a^2} \ldots 9)$$

4) Zur Bestimmung der Normale $M'N$ hat man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^2} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4}$$

daher

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

3. Berührung an der Hyperbel.

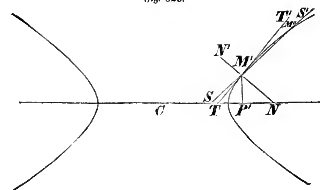
§. 297.

a) Gleichungen der Tangenzial- und Normallinie.

Es sei $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ die Gleichung einer Hyperbel; man finde die Gleichung der Tangente, welche durch den Punkt M' Fig 323), dessen Koordinaten x', y' sind, an die Hyperbel gezogen wird.

Sind x'', y'' die Koordinaten eines zweiten Punktes M'' der Hyperbel, so ist die Gleichung der durch M' und M'' gehenden Sekante SS'

Fig. 323.



$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots 1)$$

Ferner ist, da M' und M'' Punkte der Hyperbel sind,

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2, \quad b^2x''^2 - a^2y''^2 = a^2b^2.$$

daher

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'} \ldots 2)$$

und durch Substituzion in 1)

$$y - y' = \frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x') \ldots 3)$$

Läßt man nun M'' mit M' zusammenfallen, also $x'' = x'$, $y'' = y'$ sein, so erhält man als die Gleichung der Tangenziallinie TT'

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x') \ldots 4)$$

oder auch

$$b^2xx' - a^2yy' = a^2b^2 \ldots 5)$$

Aus 4) folgt die Gleichung der durch M' gehenden Normallinie NN'

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \ldots 6)$$

§. 298.

b) Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

Auf ähnliche Art, wie bei der Ellipse, findet man auch für die Hyperbel

$$\text{Subtangente } TP' = x' - \frac{a^2}{x'} \ldots 7)$$

$$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2x'}\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2} \ldots 8)$$

Subnormale $P'N = \frac{b^2 x'}{a^2} \ldots 9)$

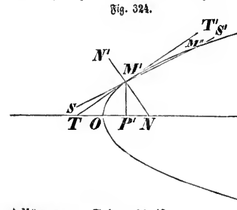
Normale $M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2} \ldots 10)$

5. Berührung an der Parabel.

§. 299.

a) Gleichungen der Berührungs- und der Normallinie.

Fig. 324.



Heißen x', y' die Koordinaten des Punktes M' (Fig. 324) einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, so wird man, um die Gleichung der durch M' an die Parabel gezogenen Tangente zu erhalten, noch einen zweiten Punkt M'' der Parabel nehmen, dessen Koordinaten x'', y'' seien. Die Gleichung der durch M' und M'' gezogenen Sekante SS' ist

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots 1)$$

Für die Punkte M' und M'' der Parabel ist aber

$$y'^2 = 2px', \qquad y''^2 = 2px'',$$

woraus

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'} \ldots 2)$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in 1), so hat man als Gleichung der Sekante SS'

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'}(x - x') \ldots 3)$$

Läßt man nun den Punkt M'' mit M' zusammenfallen, wodurch $y'' = y'$ wird, so erhält man aus 3) die Gleichung der Berührungslinie TT'

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \ldots 4)$$

oder

$$yy' = p\,(x + x') \ldots 5)$$

Für die durch M' gehende Normallinie NN' findet man aus 4)

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ldots 6)$$

§. 300.

b) Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1) Sucht man aus 5) die Abscisse des Punktes T, indem man $y = o$ setzt, so erhält man $TO = x = -x'$; daher ist

$$TP' = TO + AP' = x' + x' = 2x',$$

also Subtangente $TP' = 2x' \ldots 7)$

2) Für die Tangente M'T hat man

$$M'T^2 = M'P'^2 + TP'^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2,$$

somit Tangente $M'T = \sqrt{2x'(p + 2x')} \ldots 8)$

3) Setzt man in 6) $y = o$, so erhält man für die Abscisse des Punktes N $ON = x = x' + p$, daher $P'N = ON - OP' = p$; also Subnormale $P'N = p \ldots 9)$.

4) Für die Normale M'N erhält man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2,$$

also Normale $M'N = \sqrt{p(p + 2x')} \ldots 10)$

g. Uebungsaufgaben.

§. 301.

1. Die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ so zu verändern, daß der Anfangspunkt der Koordinaten
   a) $x = 2, \quad y = -3$;
   b) $x = -1, y = o$

werde.

2. Die Gleichung eines Kreises ist
   a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 24$;
   b) $x^2 + y^2 = 8x + 6y + 75$;

   man bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes und die Länge des Halbmessers.
3. Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 100$. Wie viel Punkte hat die Gerade
   a) $y = 6x - 12$;
   b) $4y + 3x = 50$;
   c) $4y = x + 40$

   mit diesem Kreise gemein?
4. Zwei Punkte und eine Gerade sind gegeben; man soll einen Kreis finden, welcher durch jene zwei Punkte geht und die Gerade berührt.
5. Die Gleichung eines Kreises zu finden,
   a) welcher durch zwei gegebene Punkte geht, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt;
   b) welcher durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei gegebene Kreise berührt;
   c) welcher drei gegebene Kreise berührt.
6. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.
7. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 = 144$, die Gleichung einer Geraden

a) $y = 3x + 5,$
b) $y = x + 5,$
c) $y = 2x - 9;$

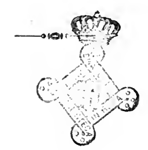
man bestimme, wie viele Punkte die Ellipse mit jeder dieser Geraden gemeinschaftlich habe.

8. Die Gleichung einer Ellipse ist $x^2 + 25y^2 = 25$; man suche die Gleichung der Tangente für den Berührungspunkt $x' = 3$, $y' = \frac{4}{5}$.
9. Von einem Punkte außerhalb der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.
10. Wenn man durch die Endpunkte der großen oder kleinen Axe zu einem Punkte der Ellipse zwei Sehnen zieht, den Winkel dieser Sehnen zu bestimmen.
11. Die Gleichung einer Hyperbel ist $9y^2 - 4x^2 = 36$; wie viele Punkte hat die Gerade

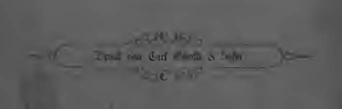
a) $y = \frac{2x}{3} + 2,$
b) $y = 2x - 8,$
c) $y = x - 3$

mit der Hyperbel gemeinschaftlich?

12. Von einem Punkte außerhalb der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.
13. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 3x$; man suche die Gleichung der Tangente für den Berührungspunkt $x' = 3$, $y' = 3$.
14. Von einem Punkte außerhalb der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.
15. Die Bahn eines Kometen sei eine Parabel, und es seien zwei Entfernungen desselben von der Sonne, d. i. zwei Leitstrahlen r' und r'', so wie der Winkel α, den sie einschließen, gegeben; man suche den Ort des Periheliums, d. i. den Parameter p und die Lage der Axe oder den Winkel v zwischen der Axe und dem Leitstrahl r'.







Druck von Carl Gerold's Sohn





